Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 57 – 66.

УДК 514.83

Е. С. Ерина[1], В. В. Лебедева[2], М. А. Паринов[3]

О нётеровых пространствах Максвелла, допускающих одномерные и трехмерные группы симметрий

Ключевые слова: группа Пуанкаре, нётерово пространство Максвелла.

Установлена нётеровость пространств Максвелла, допускающих одномерные группы симметрий. Найдены условия нётеровости пространств Максвелла для некоторых классов, допускающих трехмерные подгруппы группы Пуанкаре.

Keywords: Poincaré group, Noether's Maxwell space.

We prove the following state: every Maxwell space, which admit the one-dimensional subgroup of the Poincaré group, is a Noether's Maxwell space. Also we formulate conditions of noetherness for Maxwell spaces that belong to some classes corresponding to three-dimensional subgroups of the Poincaré group.

1. Введение. Постановка задачи

В работах [3, 4, 5] описана классификация пространств Максвелла, допускающих нетривиальные подгруппы группы Пуанкаре. Эта классификация связана с методом получения первых интегралов уравнений Лоренца, основанном на использовании группы симметрий G_S пространства Максвелла [1, 3]. В работе [2] введено понятие нётерова пространства Максвелла. Для нётеровых пространств Максвелла первые интегралы уравнений Лоренца получаются путем непосредственного применения теоремы Э. Нётер. В работе [2] описаны результаты исследования на нётеровость пространств Максвелла, допускающих шестимерные, пятимерные и некоторые четырехмерные группы G_S. В работе Е. С. Ериной и М. А. Паринова[4] описаны результаты исследования на нётеровость пространств Максвелла классов $C_{3,1a}, C_{3,1b}, C_{3,1c}, C_{3,2a}, C_{3,2b}, C_{3,3}, C_{3,4}, C_{3,5}, C_{3,6a}, C_{3,6b}$ с трехмерными группами симметрий.

В настоящей работе мы приводим результаты исследования на нётеровость классов пространств Максвелла $C_{3,8}$, $C_{3,9c}$, $C_{3,10b}$, $C_{3,20}$, $C_{3,21}$, допускающих 3-мерные группы G_S, а также устанавливаем нётеровость пространств Максвелла с одномерной группой симметрий.

[1]Ивановская государственная текстильная академия; E-mail: erinaes@mail.ru.

[2]Ивановский государственный университет; E-mail: lebedeva_lera@mail.ru.

[3]Ивановская государственная текстильная академия, Ивановский государственный университет; E-mail: mihailparinov@mail.ru.

[4]*Ерина Е. С., Паринов М. А.* Нётеровы пространства Максвелла и факторы Бессель-Хагена // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. – 2012. – Т. 278. – Принята к публикации.

Введем необходимые понятия.

Пространство Максвелла есть тройка $(M,\, g,\, F)$, где M — 4-мерное вещественное многообразие, $F = \frac{1}{2}\, F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура (замкнутая внешняя дифференциальная 2-форма) на M, $g = g_{i,j}\; dx^j\; dx^j$ — псевдоевклидова метрика на M лоренцевой сигнатуры $(- - -+)$. Пара $(M,\, g)$ есть область в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$.

Потенциальная структура на гладком многообразии M есть дифференциальная 1-форма $A = A_i\, dx^i$, $A_i = A_i(x)$. Если многообразие M 4-мерно, и на нем задана еще псевдоевклидова метрика g лоренцевой сигнатуры, то тройку $(M,\, g,\, A)$ можно интерпретировать как 4-потенциал электромагнитного поля в области $M \subset \mathbb{R}^4_1$.

Группой Пуанкаре называют группу движений G_g пространства Минковского $\mathbb{R}^4_1$. Группа симметрий пространства Максвелла есть пересечение группы Пуанкаре с группой симплектических диффеоморфизмов структуры $(M,\, F)$: $G_S = G_g \cap G_F$. Группа симметрий потенциала есть пересечение группы Пуанкаре с потенциальной группой G_A, т. е. группой диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих A: $G_P = G_g \cap G_A$. Соответствующие группам G_g, G_F и G_A алгебры Ли векторных полей задаются следующим образом:

$$\mathcal{L}_g = \{\xi :\; L_\xi g_{ij} = 0\}, \quad \mathcal{L}_F = \{\xi :\; L_\xi F_{ij} = 0\}, \quad \mathcal{L}_A = \{\xi :\; L_\xi A_i = 0\},$$

где L_ξ — производная Ли.

Каждой потенциальной структуре $A = A_i\, dx^i$ $(A_i = A_i(x))$ на пространстве Минковского $(M,\, g)$ (потенциалу $(M,\, g,\, A)$) можно сопоставить пространство Максвелла $(M,\, g,\, F)$, положив

$$F = dA \quad (F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i). \tag{1}$$

Обратно, каждому пространству Максвелла соответствует потенциал $(M,\, g,\, A)$, для которого справедливо соотношение (1)[5]; он определен с точностью до дифференциала от скалярной функции. Говорят, что потенциальная структура A подчинена симплектической структуре F, если выполнено условие (1). Если для $(M,\, g,\, F)$ и $(M,\, g,\, A)$ выполнено (1), то $G_P \subset G_S$.

Определение ([2]). Пространство Максвелла $(M,\, g,\, F)$ называется *нётеровым*, если оно допускает нетривиальную группу G_S и существует такой потенциал $(M,\, g,\, A)$, что A подчинена F и группы симмметрий пространства Максвелла и потенциала совпадают: $G_P = G_S$.

Мы рассматриваем задачу исследования на нётеровость пространств Максвелла классов $C_{k,l}$ [3, 4, 5]. Каждой группе $G_{k,l}$ — подгруппе группы Пуанкаре из списка И. В. Белько, соответствует класс $C_{k,l}$ пространств

[5] Это верно при условии, что группа когомологий размерности 2 тривиальна: $H^2(M) = 0$. Под группой когомологий (де Рама) размерности k многообразия M понимается фактор-пространство $H^k(M)$ пространства замкнутых внешних дифференциальных k-форм по подпространству точных форм.

Максвелла и класс $P_{k,l}$ потенциалов, допускающих эту группу [6]. Обозначим через $\tilde{C}_{k,l}$ линейное пространство, состоящее из дифференциальных 2-форм F, задающих пространства Максвелла класса $C_{k,l}$, а через $\tilde{P}_{k,l}$ — линейное пространство дифференциальных 1-форм A, задающих потенциалы класса $P_{k,l}$. Внешний дифференциал действует как линейный оператор из $\tilde{P}_{k,l}$ в $\tilde{C}_{k,l}$:

$$d:\ \tilde{P}_{k,l} \to \tilde{C}_{k,l} \quad (A \mapsto F = dA). \tag{2}$$

Образ $d(\tilde{P}_{k,l})$ отображения (2) состоит из пространств Максвелла, допускающих группу $G_{k,l}$. Они будут нётеровыми при условии $G_S = G_{k,l}$. Других нётеровых пространств Максвелла, допускающих группу $G_{k,l}$, не существует, т. к. для потенциальной структуры A, подчиненной симплектической структуре F, всегда выполнено включение $G_A \subset G_F$, а следовательно, и $G_P \subset G_S$. Эти замечания используются при исследовании на нётеровость пространств Максвелла классов $C_{k,l}$ при $k = 3$ в разделе 3.

2. Пространства Максвелла с одномерными группами симметрий

Следующее утверждение означает, что в случае общего положения пространство Максвелла с одномерной группой симметрий является нётеровым.

Предложение 1. *Пусть* 1) *пространство Максвелла* $(M,\, g,\, F)$ *допускает одномерную группу симметрий* G_S*,* 2) F *— невырожденная форма и* 3) *группа когомологий размерности* 2 *многообразия* M *тривиальна:* $H^2(M) = 0$*. Тогда* $(M,\, g,\, F)$ *— нётерово пространство Максвелла.*

Доказательство. Так как $H^2(M) = 0$, то для 2-формы F на многообразии M существует 1-форма A, такая, что выполнено (1). Пусть ξ — базисный вектор алгебры $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_g \cap \mathcal{L}_F$, т. е. $L_\xi F_{ij} = L_\xi g_{ij} = 0$. Если $L_\xi A_i = 0$, то $\xi \in \mathcal{L}_P = \mathcal{L}_g \cap \mathcal{L}_A$ и, следовательно, $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}_S$; поэтому $G_P = G_S$, т. е. пространство Максвелла $(M,\, g,\, F)$ нётерово.

Пусть теперь $L_\xi A_i \neq 0$. Покажем, что существует калибровочное преобразование

$$A' = A + df \quad (A'_i = A_i + \partial_i f), \tag{3}$$

приводящее к симметричному потенциалу $(M,\, g,\, A')$:

$$L_\xi (A'_i + \partial_i f) = 0. \tag{4}$$

Так как форма $F = dA$ невырождена, т. е. $\det(F_{ij}) \neq 0$, то существует другое представление алгебры $\mathcal{L}_F$ в виде алгебры Ли гамильтоновых функций $\mathcal{F}_F$. Изоморфизм алгебр $\mathcal{L}_F$ и $\mathcal{F}_F$ задается формулой

$$\varphi:\ \mathcal{L}_F \to \mathcal{F}_F \quad (\xi \mapsto h), \quad \partial_i h = F_{ik}\xi^k, \tag{5}$$

где предполагается, что $\mathcal{F}_F$ уже факторизована по константам. Для алгебры $\mathcal{F}_A = \varphi(\mathcal{L}_A)$ справедливо отношение [7]

$$h \in \mathcal{F}_A \quad \Leftrightarrow \quad h - \Phi^{kl} A_k \partial_l h = 0, \tag{6}$$

где (Φ^{kl}) — матрица, обратная к (F_{ij})[6]. При этом уравнение (4) переходит в следующее

$$h - \Phi^{kl} A_k \partial_l h - \Phi^{kl} \partial_k f \partial_l h = 0, \tag{7}$$

которое можно переписать в виде

$$\xi^k \partial_k f = H(x), \tag{8}$$

где $\xi^k = \Phi^{kl}\partial_l h$ и $H(x) = h - \Phi^{kl} A_k \partial_l h$. Уравнение (8) имеет решение относительно f в окрестности любой точки $x \in M$, в которой поле ξ^k не обращается в нуль[7]. Ввиду тривиальности группы когомологий $H^2(M)$ и аналитичности поля ξ функция f допускает продолжение на все многообразие M. Таким образом, существует калибровочное преобразование к симметричному потенциалу (M, g, A'), такому, что $G_{P'} = G_S$, где $G_{P'} = G_g \cap G_{A'}$; поэтому пространство Максвелла с одномерной группой симметрий будет нётеровым. ■

3. Пространства Максвелла с трехмерными группами симметрий

В этом разделе мы приводим результаты исследования на нётеровость пространств Максвелла классов $C_{3,8}$, $C_{3,9c}$, $C_{3,10b}$, $C_{3,20}$, $C_{3,21}$, допускающих 3-мерные группы G_S. Тензоры F_{ij}, лежащие в $d(\tilde{P}_{k,l})$ — образе отображения (2), будем помечать тильдой:

$$\tilde{F}_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \tag{9}$$

3.1. Класс $C_{3,8}$. Алгебре $\mathcal{L}_{3,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2,\, e_3,\, e_2 - e_4\}$ (группе $G_{3,8}$) соответствует класс пространств Максвелла $C_{3,8}$, задаваемый тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned}
&F_{13} = C_1 \cdot \tilde{x}^2 + C_2, && F_{24} = C_5 \cdot \tilde{x}^2 + C_6,\\
&F_{23} = \frac{C_1}{2} \cdot \left(\tilde{x}^2\right)^2 + C_2 \cdot \tilde{x}^2 + C_3, && F_{12} = -\frac{C_5}{2} \cdot \left(\tilde{x}^2\right)^2 - C_6 \cdot \tilde{x}^2 + C_7,\\
&F_{34} = -\frac{C_1}{2} \cdot \left(\tilde{x}^2\right)^2 - C_2 \cdot \tilde{x}^2 + C_4, && F_{14} = -\frac{C_5}{2} \cdot \left(\tilde{x}^2\right)^2 - C_6 \cdot \tilde{x}^2 + C_8,
\end{aligned} \tag{10}$$

[6] Отметим, что ввиду подчиненности A и F справедливы включения $\mathcal{L}_A \subset \mathcal{L}_F$ и $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}_F$.

[7] См., напр., *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964, С. 78.

где

$$C_1 = a_1,\quad C_3 = \frac{a_1}{2\lambda^2}\tilde{x}^1 + a_2,\quad C_4 = -C_1 - C_3,\quad C_6 = a_3,\quad C_8 = C_5 + C_7 \quad (11)$$

(a_i = const), $C_k = C_k(\tilde{x}^1)$ (k = 2, 5, 7) — произвольные функции одной переменной, и

$$\tilde{x}^1 = 2\lambda x^1 + \left(x^2 + x^4\right)^2,\quad \tilde{x}^2 = \frac{x^2 + x^4}{\lambda}. \quad (12)$$

Предложение 2. *Для того, чтобы пространство Максвелла класса* $C_{3,8}$ *было нётеровым, необходимо, чтобы* $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Доказательство. Класс потенциалов $P_{3,8}$, соответствующий группе $G_{3,8}$, задается ковекторным полем A_i вида

$$\begin{aligned}&A_1 = B_2\cdot\tilde{x}^2 + B_3,\quad A_2 = \frac{1}{2}B_2\cdot(\tilde{x}^2)^2 + B_3\cdot\tilde{x}^2 + B_1,\\ &A_3 = A_3(\tilde{x}^1),\quad A_4 = A_2 + B_2,\end{aligned} \quad (13)$$

где $A_3(\tilde{x}^1)$ и $B_k = B_k(\tilde{x}^1)$ (k = 1, 2, 3) — произвольные функции. Для нахождения образа $d(\tilde{P}_{3,8})$ применим формулу (9):

$$\begin{aligned}&\tilde{F}_{13} = 2\lambda A_3', &&\tilde{F}_{24} = 2\lambda B_2'\cdot\tilde{x}^2,\\ &\tilde{F}_{23} = 2\lambda A_3'\cdot\tilde{x}^2, &&\tilde{F}_{12} = -\lambda B_2'\cdot\left(\tilde{x}^2\right)^2 - \frac{B_2}{\lambda} + 2\lambda B_1',\\ &\tilde{F}_{34} = -2\lambda A_3'\cdot\tilde{x}^2, &&\tilde{F}_{14} = \tilde{F}_{12} + 2\lambda B_2'.\end{aligned} \quad (14)$$

Приравнивая соответствующие компоненты в (10) и (14), а также учитывая (11) и линейную независимость функций 1, $\tilde{x}^2$ и $\left(\tilde{x}^2\right)^2$ (разделяя переменные $\tilde{x}^1$ и $\tilde{x}^2$), получим, что равенство $\tilde{F}_{ij} = F_{ij}$ достижимо при выполнении следующих условий: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. При этом выражение тензора (10) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}&F_{13} = C_2(\tilde{x}^1), &&F_{24} = C_5(\tilde{x}^1)\cdot\tilde{x}^2,\\ &F_{23} = C_2(\tilde{x}^1)\cdot\tilde{x}^2, &&F_{12} = -\frac{C_5(\tilde{x}^1)}{2}\cdot\left(\tilde{x}^2\right)^2 + C_7(\tilde{x}^1),\\ &F_{34} = C_2(\tilde{x}^1)\cdot\tilde{x}^2, &&F_{14} = F_{12} + C_5(\tilde{x}^1),\end{aligned} \quad (15)$$

а функции $A_3(\tilde{x}^1)$ и $B_k = B_k(\tilde{x}^1)$ (k = 1, 2, 3), задающие потенциал поля (15), выражаются через $C_k = C_k(\tilde{x}^1)$ (k = 2, 5, 7) в результате интегрирования следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA_3}{d\tilde{x}^1} = \frac{1}{2\lambda}C_2(\tilde{x}^1),\quad \frac{dB_2}{d\tilde{x}^1} = \frac{1}{2\lambda}C_5(\tilde{x}^1),\quad \frac{dB_1}{d\tilde{x}^1} = \frac{1}{2\lambda^2}B_2(\tilde{x}^1) + \frac{1}{2\lambda}C_7(\tilde{x}^1). \quad (16)$$

Эта система, очевидно, имеет решения; поэтому необходимое условие нётеровости для пространств Максвелла класса $C_{3,8}$, задаваемых тензором (15), выполнено. ■

Замечание 1. Для получения достаточных условий нётеровости для пространств Максвелла класса $C_{3,8}$ необходимо исследовать систему уравнений

$$L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0 \quad (\xi_\alpha = e_{12} - e_{14} + \lambda e_2,\ e_3,\ e_2 - e_4) \tag{17}$$

для тензорных полей F_{ij} вида (15), т. е. найти условия на F_{ij}, при которых система (17) имеет 3-мерное пространство решений. Это довольно громоздская задача.

3.2. Класс $C_{3,9c}$. Алгебре $\mathcal{L}_{3,9c} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_1, e_2 - e_4\}$ соответствует класс пространств Максвелла $C_{3,9c}$, задаваемый тензором F_{ij} вида (10), где $C_2 = C_2(\tilde{x}^3)$, $C_3 = C_3(\tilde{x}^3)$ и $C_7 = C_7(\tilde{x}^3)$ — произвольные функции, а

$$\begin{aligned} &C_1 = \lambda C_7'(\tilde{x}^3), \quad C_4 = -\lambda C_7'(\tilde{x}^3) - C_3(\tilde{x}^3), \quad C_5 = A, \\ &C_6 = B, \quad C_8 = C_7(\tilde{x}^3) + A \quad (A, B = \mathrm{const}), \end{aligned} \tag{18}$$

и

$$\tilde{x}^2 = \frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \quad \tilde{x}^3 = x^3. \tag{19}$$

Предложение 3. *Для того, чтобы пространство Максвелла класса $C_{3,9c}$ было нётеровым, необходимо, чтобы $A = B = 0$.*

Доказательство. Класс потенциалов $P_{3,9c}$, соответствующий группе $G_{3,9c}$, задается ковекторным полем A_i вида

$$\begin{aligned} &A_1 = B_2 \cdot \tilde{x}^2 + B_3, \quad A_2 = \frac{1}{2} B_2 \cdot (\tilde{x}^2)^2 + B_3 \cdot \tilde{x}^2 + B_1, \\ &A_3 = A_3(\tilde{x}^3), \quad A_4 = A_2 + B_2, \end{aligned} \tag{20}$$

где $A_3(\tilde{x}^3)$ и $B_k = B_k(\tilde{x}^3)$ $(k = 1, 2, 3)$ — произвольные функции. Для нахождения образа $d(\tilde{P}_{3,9c})$ применим формулу (9):

$$\begin{aligned} &\tilde{F}_{13} = -B_2'\tilde{x}^2 - B_3', && \tilde{F}_{24} = 0, \\ &\tilde{F}_{23} = -\frac{1}{2} B_2'(\tilde{x}^2)^2 - B_3'\tilde{x}^2 - B_1', && \tilde{F}_{12} = -\frac{B_2}{\lambda}, \\ &\tilde{F}_{34} = \frac{1}{2} B_2'(\tilde{x}^2)^2 + B_3'\tilde{x}^2 + B_1' + B_2', && \tilde{F}_{14} = -\frac{B_2}{\lambda}. \end{aligned} \tag{21}$$

Приравнивая соответствующие компоненты в (10) и (21), а также учитывая (18) и линейную независимость функций 1, $\tilde{x}^2$ и $\left(\tilde{x}^2\right)^2$ (разделяя переменные $\tilde{x}^1$ и $\tilde{x}^2$), получим, что равенство $\tilde{F}_{ij} = F_{ij}$ достижимо при выполнении следующих условий: $A = B = 0$. При этом выражение тензора (10)–(21) упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = C_7(\tilde{x}^3), \quad F_{13} = \lambda C_7'(\tilde{x}^3) \cdot \tilde{x}^2 + C_2(\tilde{x}^3), \quad F_{24} = 0, \\ &F_{23} = \frac{\lambda}{2} C_7'(\tilde{x}^3) \cdot (\tilde{x}^2)^2 + C_2(\tilde{x}^3) \cdot \tilde{x}^2 + C_3(\tilde{x}^3), \quad F_{34} = -F_{23} - \lambda C_7'(\tilde{x}^3), \end{aligned} \tag{22}$$

а функции $B_k = B_k(\tilde{x}^3)$ $(k = 1, 2, 3)$, задающие потенциал поля (22), выражаются через $C_k = C_k(\tilde{x}^3)$ $(k = 2, 3, 7)$ по формулам

$$B_1 = -\int C_3(\tilde{x}^3)d\tilde{x}^3, \quad B_2 = -\lambda C_7(\tilde{x}^3), \quad B_3 = -\int C_2(\tilde{x}^3)d\tilde{x}^3. \tag{23}$$

■

3.3. Класс $C_{3,10b}$. Алгебре $\mathcal{L}_{3,10b} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_1 + \mu e_3,\, e_2 - e_4\}$ соответствует класс пространств Максвелла $C_{3,10b}$, задаваемый тензором F_{ij} вида (10), где

$$\begin{aligned}
&C_1 = \frac{a_1}{\mu\tilde{x}^1} + a_2, \quad C_2 = \frac{\tilde{x}^3 C_1 - b_1(\tilde{x}^1)}{\mu\tilde{x}^1}, \quad C_3 = \frac{\tilde{x}^3 C_2}{\mu\tilde{x}^1} + b_2(\tilde{x}^1),\\
&C_4 = -C_1 - C_3, \quad C_5 = \frac{a_1}{\tilde{x}^1}, \quad C_6 = \frac{a_1\tilde{x}^3}{\mu\left(\tilde{x}^1\right)^2} + b_1'(\tilde{x}^1),\\
&C_7 = -\frac{a_1\left(\tilde{x}^3\right)^2}{2\mu^2\left(\tilde{x}^1\right)^3} - \frac{\tilde{x}^3 b_1'(\tilde{x}^1)}{\mu\tilde{x}^1} + b_3(\tilde{x}^1), \quad C_8 = C_5 + C_7,
\end{aligned} \tag{24}$$

$a_1, a_2 = \mathrm{const}$, $b_1(\tilde{x}^1)$, $b_2(\tilde{x}^1)$ и $b_3(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции, а также

$$\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \quad \tilde{x}^3 = x^3. \tag{25}$$

Предложение 4. *Все пространства Максвелла класса $C_{3,10b}$ не являются нётеровыми.*

Доказательство. Класс потенциалов $P_{3,10b}$, соответствующий группе $G_{3,10b}$, задается ковекторным полем A_i вида (13), где B_k определяются формулами

$$\begin{aligned}
&B_1 = \frac{(\tilde{x}^3)^2}{2\mu^2(\tilde{x}^1)^2}\Phi(\tilde{x}^1) + \frac{\tilde{x}^3}{\mu\tilde{x}^1}\Psi(\tilde{x}^1) + \Xi(\tilde{x}^1),\\
&B_2 = \Phi(\tilde{x}^1), \quad B_3 = \frac{\tilde{x}^3}{\mu\tilde{x}^1}\Phi(\tilde{x}^1) + \Psi(\tilde{x}^1),
\end{aligned} \tag{26}$$

где $\Phi(\tilde{x}^1)$, $\Psi(\tilde{x}^1)$ и $\Xi(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции. Для нахождения образа $d(\tilde{P}_{3,10b})$ применим формулу (9):

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{14} = -\Phi'(\tilde{x}^1)\cdot\tilde{x}^2 - \frac{\Psi(\tilde{x}^1)}{\tilde{x}^1} - \Psi'(\tilde{x}^1) - \frac{\tilde{x}^3\Phi'(\tilde{x}^1)}{\mu\tilde{x}^1},\\
&\tilde{F}_{13} = -\frac{\Phi(\tilde{x}^1)}{\mu\tilde{x}^1}, \quad \tilde{F}_{24} = \tilde{x}^1\Phi(\tilde{x}^1)\cdot\tilde{x}^2 + \Phi'(\tilde{x}^1) + \frac{\tilde{x}^3\Phi(\tilde{x}^1)}{\mu} + \tilde{x}^1\Psi(\tilde{x}^1),\\
&\tilde{F}_{23} = -\tilde{F}_{34} = -\frac{\Phi(\tilde{x}^1)}{\mu\tilde{x}^1}\cdot\tilde{x}^2 + A_3'(\tilde{x}^1) - \frac{\tilde{x}^3\Phi(\tilde{x}^1)}{\mu^2(\tilde{x}^1)^2} - \frac{\Psi(\tilde{x}^1)}{\mu\tilde{x}^1}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Сравнивая соответствующие компоненты (10)–(24) и (27) , получаем, что для выполнения равенства $\tilde{F}_{ij} = F_{ij}$ необходимы следующие условия:

$$a_1 = a_2 = b_1(\tilde{x}^1) = b_3(\tilde{x}^1) = 0. \tag{28}$$

Тензор F_{ij} принимает вид:

$$F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = b_2(\tilde{x}^1). \tag{29}$$

Таким образом, для тензоров вида (29) существуют прообразы в $\tilde{P}_{3,10b}$, и они имеют вид

$$A_i = \left(0,\, \Xi(\tilde{x}^1),\, \int b_2(\tilde{x}^1)\, dx^2,\, \Xi(\tilde{x}^1)\right).$$

Однако, пространства Максвелла, задаваемые тензором (29) лежат в классе $C_{4,9b}$, соответствующем 4-мерной алгебре

$$\mathcal{L}_{4,9b} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_1,\, e_3,\, e_2 - e_4\},$$

и в действительности допускают 5-мерную группу, соответствующую алгебре $L\{e_{12} - e_{14},\, e_{23} + e_{34},\, e_1,\, e_3,\, e_2 - e_4\}$; поэтому $G_P \neq G_S$, и в классе $C_{3,10b}$ нет нётеровых пространств Максвелла. ■

3.4. Класс $C_{3,20}$. Алгебре $\mathcal{L}_{3,20} = L\{e_{12},\, e_{13},\, e_{23}\}$ (группе $G_{3,20}$) соответствует класс пространств Максвелла $C_{3,20}$, задаваемый тензором F_{ij} вида:

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{14} = x^1\Phi(\rho,\, x^4), \\ &F_{24} = x^2\Phi(\rho,\, x^4), \quad F_{34} = x^3\Phi(\rho,\, x^4), \end{aligned} \tag{30}$$

где $\rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, а $\Phi(\rho,\, x^4)$ — произвольная функция. При этом группа симметрий G_S совпадает с $G_{3,20}$ при условии

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \neq 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial \Phi}{\partial x^4} \neq 0. \tag{31}$$

Предложение 5. *Пространства Максвелла класса $C_{3,20}$, задаваемого тензором* (30)*, являются нётеровыми, если выполнены условия* (31).

Доказательство. Класс потенциалов $P_{3,20}$, соответствующий группе $G_{3,20}$ задается ковекторным полем A_i вида

$$A_i = (0,\ 0,\ 0,\ A_4(\rho,\, x^4)), \tag{32}$$

где $A_4(\rho,\, x^4)$ — произвольная функция. Для нахождения образа $d(\tilde{P}_{3,20})$ применим формулу (9):

$$\tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{13} = \tilde{F}_{23} = 0, \quad \tilde{F}_{14} = \frac{x^1}{\rho}\frac{\partial A_4}{\partial \rho}, \quad \tilde{F}_{24} = \frac{x^2}{\rho}\frac{\partial A_4}{\partial \rho}, \quad \tilde{F}_{34} = \frac{x^3}{\rho}\frac{\partial A_4}{\partial \rho}. \tag{33}$$

Сравнивая (30) и (33), получим, что равенство $\tilde{F}_{ij} = F_{ij}$ возможно при условии $\dfrac{\partial A_4}{\partial \rho} = \rho\Phi(\rho,\, x^4)$. Для заданной функции Φ функция A_4 вычисляется по формуле

$$A_4 = \int \rho\,\Phi(\rho, x^4)\,d\rho.$$

Отсюда видно, что $d(\tilde{P}_{3,20}) = C_{3,20}$. При условии (31) группы G_S и G_P 3-мерны и $G_S = G_P = G_{3,20}$. ■

3.5. Класс $C_{3,21}$. Алгебре $\mathcal{L}_{3,21} = L\{e_{12},\, e_{14},\, e_{24}\}$ (группе $G_{3,21}$) соответствует класс пространств Максвелла $C_{3,21}$, задаваемый тензором F_{ij} вида:

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = x^1\,\Phi(u,\, x^3),\\ &F_{23} = x^2\,\Phi(u,\, x^3), \quad F_{34} = x^4\,\Phi(u,\, x^3), \end{aligned} \tag{34}$$

где $u = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^4)^2$, а $\Phi(u,\, x^3)$ — произвольная функция. При этом группа симметрий G_S совпадает с $G_{3,21}$ при условии

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} \neq 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial\Phi}{\partial x^3} \neq 0. \tag{35}$$

Предложение 6. *Пространства Максвелла класса $C_{3,21}$, задаваемого тензором* (34)*, являются нётеровыми, если выполнены условия* (35).

Доказательство. Класс потенциалов $P_{3,21}$, соответствующий группе $G_{3,21}$, $\mathcal{L}_{3,21} = L\{e_{12},\, e_{14},\, e_{24}\}$, задается ковекторным полем A_i вида

$$A_i = (0,\ 0,\ A_3(u,\, x^3),\ 0), \tag{36}$$

где $A_3(u,\, x^3)$ — произвольная функция. Для нахождения образа $d(\tilde{P}_{3,21})$ применим формулу (9):

$$\tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{14} = \tilde{F}_{24} = 0, \quad \tilde{F}_{13} = \frac{x^1}{u}\frac{\partial A_3}{\partial u}, \quad \tilde{F}_{23} = \frac{x^2}{u}\frac{\partial A_3}{\partial u}, \quad \tilde{F}_{34} = \frac{x^4}{u}\frac{\partial A_3}{\partial u}. \tag{37}$$

Сравнивая (34) и (37), получим, что равенство $\tilde{F}_{ij} = F_{ij}$ возможно при условии $\dfrac{\partial A_3}{\partial u} = u\Phi(u,\, x^3)$. Для заданной функции Φ функция A_3 вычисляется по формуле

$$A_3 = \int u\,\Phi(u, x^3)\,du.$$

Отсюда видно, что $d(\tilde{P}_{3,21}) = C_{3,21}$. При условии (35) группы G_S и G_P 3-мерны и $G_S = G_P = G_{3,21}$. ■

Список литературы

1. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. – 2002. – Т. 236. – С. 197–203.

2. *Колесова В. А., Паринов М. А.* О нётеровых пространствах Максвелла // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2007. – Вып. 1 (4). – С. 7–12.

3. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.

4. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 183–237.

5. *Паринов М. А.* Шесть классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2006. – № 1. – С. 170–171.

6. *Паринов М. А.* Классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 177–225.

7. *Паринов М. А.* Введение в симплектическую геометрию: Учеб. пособие. – Иваново: ИвГУ, 1994. – 60 с.

Поступила в редакцию 10.12.2011.