Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 49 – 56.

УДК 517.913

Е. С. Ерина[1]

Об одном алгоритме получения первых интегралов уравнений Лоренца

Ключевые слова: группа Пуанкаре, пространство Максвелла, уравнения Лоренца, первые интегралы, законы сохранения.

Предложен алгоритм получения первых интегралов уравнений Лоренца с использованием классификаций пространств Максвелла и потенциалов по подгруппам группы Пуанкаре.

Keywords: Poincaré group, Maxwell space, Lorentz equations, first integrals, conservation law.

We suggest the algorithm for reception of the first integrals for the Lorentz motion equations; in this algorithm we use the classification of Maxwell spaces and potentials by subgroups of the Poincaré group.

1. Введение

Система уравнений Лоренца [3]

$$\frac{Du^i}{ds} = -\frac{e}{mc^2}\, g^{ij}\, F_{jk}\, u^k, \quad u^k = \frac{dx^k}{ds}, \tag{1}$$

описывающая движение пробной заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле F_{ij}, в общем случае не имеет первых интегралов. Однако, если тензор F_{ij} обладает некоторыми специальными свойствами симметрий, то такие интегралы существуют. Речь идет о случаях, когда пространство Максвелла $(M,\, g,\, F)$ имеет нетривиальную группу симметрий $G_S = G_g \cap G_F$ [4]. Для таких пространств Максвелла М. А. Париновым разработан метод получения первых интегралов уравнений Лоренца, апробированный на многих примерах [2, 4] (см. разд. 3). Групповая классификация пространств Максвелла [4, 5, 6] выявила большое множество классов пространств Максвелла, для которых применим этот метод. Он позволяет находить наборы интегралов для классов пространств Максвелла $C_{k,l}$, допускающих подгруппы $G_{k,l}$ группы Пуанкаре. Наиболее трудоемкой частью в методе Паринова является поиск калибровочной функции f — решения системы уравнений (9)–(8).

[1]Ивановская государственная текстильная академия; E-mail: erinaes@mail.ru.

Групповая классификация потенциалов (M, g, A) на пространстве Минковского [7] позволяет упростить процедуру получения первых интегралов уравнений Лоренца для классов пространств Максвелла $C_{k,l}$. Дело в том, что симметричный потенциал для каждого базисного вектора $\xi \in \mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{k,l}$ можно искать в классах потенциалов P_{k_1,l_1} ($k_1 \leq k$) вместо того, чтобы решать систему уравнений для калибровочной функции. Впервые эта идея реализована в работе [9] для класса пространств Максвелла $C_{4,5}$. В настоящей работе получены наборы первых интегралов уравнений Лоренца для класса пространств Максвелла с нулевым током $W_{4,4}$, описанного в работе [8].

2. Классы симметричных пространств Максвелла и потенциалов

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пространство Максвелла есть тройка (M, g, F), где M — гладкое четырехмерное многообразие, $g = g_{ij}\, dx^i dx^j$ — псевдоевклидова метрика лоренцевой сигнатуры $(---+)$, $F = \frac{1}{2}F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура (замкнутая дифференциальная 2-форма) на M.

4-*потенциал электромагнитного поля* — тройка (M, g, A), где $A = A_i\, dx^i$ — дифференциальная 1-форма на M ($A_i = A_i(x)$). Пара (M, A) есть *потенциальная структура* на M.

Группа Пуанкаре G_g — группа симметрий псевдоевклидовой структуры (M, g), т. е. множество диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих метрический тензор g_{ij}; $\mathcal{L}_g$ — соответствующая алгебра Ли векторных полей на M: $\xi \in \mathcal{L}_g \Leftrightarrow L_\xi g_{ij} = 0$. Стандартный базис в $\mathcal{L}_g$:

$$\begin{aligned}
&e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (0,0,1,0),\ e_4 = (0,0,0,1),\\
&e_{12} = (-x^2, x^1, 0, 0), \quad e_{13} = (x^3, 0, -x^1, 0), \quad e_{23} = (0, -x^3, x^2, 0),\\
&e_{14} = (x^4, 0, 0, x^1), \quad e_{24} = (0, x^4, 0, x^2), \quad e_{34} = (0, 0, x^4, x^3).
\end{aligned}$$

Группа симплектических диффеоморфизмов G_F — группа симметрий структуры (M, F); $\mathcal{L}_F$ — соответствующая алгебра Ли векторных полей на M: $\xi \in \mathcal{L}_F \Leftrightarrow L_\xi F_{ij} = 0$. *Потенциальная группа* G_A — группа симметрий потенциальной структуры (M, A); $\mathcal{L}_A$ — соответствующая алгебра Ли векторных полей на M: $\xi \in \mathcal{L}_A \Leftrightarrow L_\xi A_i = 0$.

$G_S = G_g \cap G_F$ — *группа симметрий пространства Максвелла* (M, g, F); $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_g \cap \mathcal{L}_F$ — соответствующая алгебра Ли. $G_P = G_g \cap G_A$ — *группа симметрий потенциала* (M, g, A); $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}_g \cap \mathcal{L}_A$ — соответствующая алгебра Ли. G_S и G_P — подгруппы группы Пуанкаре.

В соответствии с классификацией подгрупп группы Пуанкаре с точностью до сопряженности [1] в [4, 5, 6] получены *классы пространств*

Максвелла $C_{k,l}$, допускающих подгруппы $G_{k,l}$, а в [7] — *классы потенциалов* $P_{k,l}$, допускающих те же подгруппы $G_{k,l}$. Каждой группе $G_{k,l}$ — подгруппе группы Пуанкаре из списка в [1] (алгебре $\mathcal{L}_{k,l} = L\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$), соответствует *класс* $C_{k,l}$ *пространств Максвелла*, допускающих эту группу,

$$C_{k,l} = \{(M,\, g,\, F):\ L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0,\ \alpha = 1, \ldots, k\} \tag{2}$$

и *класс потенциалов* $P_{k,l}$, допускающих эту группу,

$$P_{k,l} = \{(M,\, g,\, A):\ L_{\xi_\alpha} A_i = 0,\ \alpha = 1, \ldots, k\}. \tag{3}$$

3. Метод М. А. Паринова получения первых интегралов уравнений Лоренца

Суть метода заключается в следующем. Уравнения Лоренца (1) могут быть получены как уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала (действия для заряженной частицы в электромагнитном поле, вообще говоря, при наличии тяготения)

$$S[x] = \int \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A_i\, dx^i\right). \tag{4}$$

В соответствии с теоремой Э. Нётер каждой одномерной группе диффеоморфизмов G_1, не меняющих функционал (4), соответствует первый интеграл уравнений Лоренца

$$H = -\xi^i \left(mcg_{ij}\dot{x}^j + \frac{e}{c} A_i\right), \tag{5}$$

где $\xi^i = \xi^i(x)$ — касательное векторное поле группы G_1 (точкой обозначено дифференцирование по параметру s). Все интегралы вида (5) могут быть получены при использовании группы $G_S = G_g \cap G_F$, где G_g — группа движений псевдориманова пространства (M, g_{ij}), а G_F — группа симметрий симплектической структуры (M, F_{ij}), т. е. диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих тензор

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \tag{6}$$

Для этого достаточно произвести следующие действия.

1. Найти базис $\{\xi_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, r = \dim G_S\}$ алгебры $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_g \cap \mathcal{L}_F$, соответствующей группе G_S. Для этого достаточно решить систему

$$L_\xi g_{ij} = 0, \quad L_\xi F_{ij} = 0, \tag{7}$$

где L_ξ означает производную Ли.

2. Для каждого базисного вектора $\xi_\alpha \in \mathcal{L}_S$ найти симметричный потенциал, получаемый с помощью калибровочного преобразования

$$A'_i = A_i + \partial_i f, \tag{8}$$

удовлетворяющий уравнению

$$L_{\xi_\alpha} A'_i = 0. \tag{9}$$

3. Выписать первые интегралы по формуле (5), заменив A_i на A'_i:

$$H_\alpha = -\xi^i_\alpha \left(mcg_{ij}\dot{x}^j + \frac{e}{c} A'_i \right). \tag{10}$$

Замечание. В случае, если тензор F_{ij} задает пространство Максвелла класса $C_{k,l}$, то его группа $G_{k,l}$ заранее известна; базис соответствующей алгебры $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{k,l}$ также известен, поэтому п. 1 в этом алгоритме надо опустить. Вместо этого необходимо решить уравнение (6) с целью нахождения какого-нибудь потенциала — ковекторного поля A_i.

Множество решений уравнения (6) бесконечно: вместе с каждым решением $A_i = A_i(x)$ его решением будет ковекторное поле (8), где f — произвольная функция четырех переменных. Поэтому для получения решения используются упрощающие предположения: например, равенство одной из компонент поля A_i нулю, принадлежность к какому-нибудь из классов потенциалов $P_{k,l}$ и другие.

4. Первые интегралы в случае класса $W_{4,4}$

Класс $W_{4,4}$, соответствующей алгебре

$$\mathcal{L}_{4,4} = L\{e_{13} + \lambda e_2,\ e_1,\ e_3,\ e_2 + e_4\}$$

(группе $G_{4,4}$), задается тензором F_{ij} вида (см. [8])

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = b_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - b_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{23} = F_{34} = b_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{13} = b_3, \quad F_{24} = b_4 \quad (b_i = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{11}$$

Пространства Максвелла, задаваемые тензорами вида (11), допускают четырехмерную группу симметрий $G_S = G_{4,4}$, для которой $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{4,4}$. Уравнения Лоренца для поля (11) имеют 4 интеграла, соответствующие базисным векторам алгебры $\mathcal{L}_{4,4}$:

$$\xi_1 = e_{13} + \lambda e_2, \quad \xi_2 = e_1, \quad \xi_3 = e_3, \quad \xi_4 = e_2 + e_4. \tag{12}$$

Прежде всего заметим, что потенциал поля (11) не задан. Попытаемся найти его в классе потенциалов $P_{4,4}$, который задается ковекторным полем A_i вида (см. [7])

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \sin\frac{x^2-x^4}{\lambda} + C_2\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda}, \quad A_2 = C_3, \\ A_3 &= C_1 \cos\frac{x^2-x^4}{\lambda} - C_2\sin\frac{x^2-x^4}{\lambda}, \quad A_4 = C_4, \end{aligned} \tag{13}$$

где $C_k = \mathrm{const}$. Подставляя (13) в (6), получим

$$\begin{aligned} F_{12} = -F_{14} &= -\frac{C_1}{\lambda}\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda}\sin\frac{x^2-x^4}{\lambda}, \quad F_{13}=0, \\ F_{23} = F_{34} &= -\frac{C_1}{\lambda}\sin\frac{x^2-x^4}{\lambda} - \frac{C_2}{\lambda}\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda}, \quad F_{24}=0. \end{aligned} \tag{14}$$

Сравнивая (14) с (11), заметим, что при $b_3 \neq 0$ или $b_4 \neq 0$ (13) не является потенциалом для (11).

Для нахождения какого-нибудь потенциала поля (11) запишем 6 уравнений системы (6), в которых правые части совпадают с (11), и положим $A_1 = 0$. Тогда легко найдем одно из решений полученной системы:

$$\begin{aligned} &A_1 = 0, \quad A_2 = b_1 x^1 \cos\frac{x^2-x^4}{\lambda} - b_2 x^1 \sin\frac{x^2-x^4}{\lambda}, \\ &\qquad A_3 = b_3 x^1 - b_1\lambda\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda} + b_2\lambda\sin\frac{x^2-x^4}{\lambda}, \quad A_4 = b_4 x^2 - A_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Проверяя условие симметрии $L_\xi A_i = 0$ поля (15) для базисных векторов алгебры $\mathcal{L}_{4,4}$, найдем, что оно выполняется только для вектора $\xi_3 = e_3$; поэтому можно выписать сохраняющуюся величину

$$H_3^{(4.4)} = mc\dot{x}^3 - \frac{e}{c}\left(b_3 x^1 - b_1\lambda\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda} + b_2\lambda\sin\frac{x^2-x^4}{\lambda}\right). \tag{16}$$

Для базисных векторов $\xi_2 = e_1$ и $\xi_4 = e_2 + e_4$ калибровочные преобразования от (15) к симметричным потенциалам находятся путем решения системы (9)–(8) без громоздких вычислений. В первом случае эта система принимает вид:

$$\partial_1(A_i + \partial_i f) = 0, \quad i = 1, \ldots, 4; \tag{17}$$

одно из ее решений (калибровочная функция) имеет вид:

$$f_2 = -b_3 x^1 x^3 - b_1 x^1 \lambda \sin\frac{x^2-x^4}{\lambda} - b_2 x^1\lambda\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda}; \tag{18}$$

симметричный потенциал $A'_i = A_i + \partial_i f_2$:

$$\begin{aligned} A'_1 &= -b_3 x^3 - b_1\lambda\sin\frac{x^2-x^4}{\lambda} - b_2\lambda\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda}, \quad A'_2 = 0, \\ A'_3 &= -b_1\lambda\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda} + b_2\lambda\sin\frac{x^2-x^4}{\lambda}, \quad A'_4 = b_4 x^2; \end{aligned} \tag{19}$$

сохраняющаяся величина:

$$H_2^{(4.4)} = mc\dot{x}^1 + \frac{e}{c}\left(b_3x^3 + b_1\lambda\sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2\lambda\cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}\right). \tag{20}$$

Во втором случае аналогично имеем: система (9)–(8) —

$$\partial_2(A_i + \partial_i f) + \partial_4(A_i + \partial_i f) = 0, \quad i = 1, \ldots, 4; \tag{21}$$

калибровочная функция —

$$f_4 = -\frac{b_4}{2}\left(x^4\right)^2; \tag{22}$$

симметричный потенциал $A'_i = A_i + \partial_i f_4$ —

$$\begin{aligned} &A'_1 = 0, \quad A'_2 = b_1x^1\cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - b_2x^1\sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &A'_3 = b_3x^1 - b_1\lambda\cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2\lambda\sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &A'_4 = b_4(x^2 - x^4) - b_1x^1\cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2x^1\sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}; \end{aligned} \tag{23}$$

сохраняющаяся величина —

$$H_4^{(4.4)} = mc(\dot{x}^2 - \dot{x}^4) - \frac{e}{c}b_4(x^2 - x^4). \tag{24}$$

Для вектора $\xi_1 = e_{13} + \lambda e_2$ так просто решить систему уравнений (9) – (8) не удается. Поэтому естественно попытаться найти симметричный потенциал в классах потенциалов $P_{3,2}$, $P_{2,3}$, $P_{2,4}$, $P_{1,2}$, у которых алгебра $\mathcal{L}_{k,l}$ содержит вектор $e_{13} + \lambda e_2$. Так же, как и в случае класса $P_{4,4}$, устанавливается, что в классах $P_{3,2}$, $P_{2,3}$ и $P_{2,4}$ симметричного потенциала нет[1]. Будем искать его в классе $P_{1,2}$, соответствующем алгебре $\mathcal{L}_{1,2} = L\{e_{13} + \lambda e_2\}$.

Класс потенциалов $P_{1,2}$ определяется ковекторными полями вида[2]

$$\begin{aligned} &A_1 = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi, \quad A_2 = A_2(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4), \\ &A_3 = -C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi, \quad A_4 = A_4(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4), \end{aligned} \tag{25}$$

где $C_i = C_i(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4)$, A_2 и A_4 — произвольные функции координат $\{\tilde{x}^i\} = \{r, \tilde{x}^2, \varphi, \tilde{x}^4\}$, связанных с $\{x^i\}$ формулами

$$x^1 = r\sin\varphi, \quad x^2 = \lambda\varphi + \tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4 = \tilde{x}^4. \tag{26}$$

[1] Перебор классов предпочтительно осуществлять в порядке убывания размерностей групп симметрий классов, т. к. чем ниже размерность, тем сложнее вычисления.

[2] Компоненты заданы в системе координат $\{x^i\}$.

Выпишем еще обратную к (26) замену

$$r=\sqrt{(x^1)^2+(x^3)^2},\quad \tilde{x}^2=x^2-\lambda\operatorname{arctg}\frac{x^1}{x^3},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{x^1}{x^3},\quad \tilde{x}^4=x^4. \tag{27}$$

Для нахождения симметричного потенциала в классе $P_{1,2}$ надо подставить (25) и (11) в уравнение (6), предварительно выразив компоненты тензора F_{ij} через переменные $\{\tilde{x}^i\}$; в полученных 6 уравнениях разделить переменные, используя линейную независимость функций $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin^2\varphi$, $\sin\varphi\cos\varphi$, $\cos^2\varphi$; в результате получится следующая система уравнений в частных производных относительно C_1, C_2, A_2 и A_4:

$$\frac{\partial A_2}{\partial r}-\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^2}=-b_1\sin\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}-b_2\cos\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}, \tag{28a}$$

$$\frac{\lambda}{r}\frac{\partial A_2}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^2}=-b_1\cos\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}+b_2\sin\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}, \tag{28b}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{C_1}{r}=-b_3, \tag{28c}$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial r}-\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^4}=b_1\sin\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}+b_2\cos\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}, \tag{28d}$$

$$\frac{\lambda}{r}\frac{\partial A_4}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^4}=b_1\cos\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}-b_2\sin\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}, \tag{28e}$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial\tilde{x}^2}-\frac{\partial A_2}{\partial\tilde{x}^4}=b_4. \tag{28f}$$

Эта система легко интегрируется, если положить $C_1=0$; одно из решений имеет вид:

$$\begin{aligned}A_2&=-b_1r\sin\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}-b_2r\cos\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}-b_4\tilde{x}^4-\frac{b_3}{2\lambda}r^2,\\ A_4&=b_1r\sin\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}+b_2r\cos\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda},\quad C_2=-\frac{b_3}{\lambda}r\tilde{x}^2.\end{aligned} \tag{29}$$

Симметричный потенциал принимает вид:

$$\begin{aligned}A_1&=-\frac{b_3}{\lambda}r\tilde{x}^2\sin\varphi,\quad A_2=-A_4-b_4\tilde{x}^4-\frac{b_3}{2\lambda}r^2,\\ A_3&=-\frac{b_3}{\lambda}r\tilde{x}^2\cos\varphi,\quad A_4=b_1r\sin\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}+b_2r\cos\frac{\tilde{x}^2-\tilde{x}^4}{\lambda}.\end{aligned} \tag{30}$$

Сохраняющаяся величина для вектора $\xi_1=e_{13}+\lambda e_2$ согласно (5) имеет вид:

$$H_1^{(4.4)}=mc(x^3\dot{x}^1+\lambda\dot{x}^2-x^1\dot{x}^3)-\frac{e}{c}\left(x^3A_1+\lambda A_2-x^1A_3\right). \tag{31}$$

С учетом (30) и (26) имеем $x^3A_1-x^1A_3=0$. Окончательно

$$\begin{aligned}H_1^{(4.4)}&=mc(x^3\dot{x}^1+\lambda\dot{x}^2-x^1\dot{x}^3)-\\ &\frac{e}{c}\lambda\left(b_1r\sin\frac{\tilde{x}^2+\tilde{x}^4}{\lambda}+b_2r\cos\frac{\tilde{x}^2+\tilde{x}^4}{\lambda}+b_4\tilde{x}^4-\frac{b_3}{2\lambda}r^2\right),\end{aligned} \tag{32}$$

где связь между координатами задается формулами (27).

Список литературы

1. *Бельхо И. В.* Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.

2. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. – 2002. – Т. 236. – С. 197–203.

3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

4. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.

5. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 183–237.

6. *Паринов М. А.* Шесть классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2006. – № 1. – С. 170–171.

7. *Паринов М. А.* Классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 177–225.

8. *Паринов М. А.* Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие подгруппы группы Пуанкаре размерностей 3–6 // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2009. – Вып. 1 (6). – С. 83–102.

9. *Соболева Н. А., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для пространств Максвелла, допускающих гиперболические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2006. – Вып 1 (3). – С. 51–60.

Поступила в редакцию 15.12.2011.