Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 67 – 74.

УДК 514.763.337

Н. В. Ерофеева[1], М. А. Паринов[2]

О симплектических листах симметричных пространств Максвелла

Ключевые слова: пространство Максвелла, симплектический лист.

Каждое пространство Максвелла порождает пуассонову структуру на 4-мерном вещественном многообразии. С пространствами Максвелла чистых вырожденных типов однозначно связаны невырожденные симплектические структуры на 2-мерных многообразиях — симплектические листы. Рассматриваются примеры нахождения симплектических листов для пространств Максвелла с нетривиальными группами симметрий.

Keywords: Maxwell space, symplectic sheet.

Every Maxwell space generates the Poisson structure on four-dimensional real manifold. For every Maxwell space of constant degenerated type we consider non-degenerated symplectic structure on two-dimensional manifold (symplectic sheet). We find symplectic sheets for some Maxwell spaces with non-trivial symmetry groups.

1. Введение

Пуассоновы многообразия появляются и используются в различных областях современной науки. Наиболее известными из них являются симплектические структуры на многообразиях [1], лежащие в основе гамильтоновой механики. Вырожденные симплектические многообразия появляются при изучении механических систем со связями. Пуассонова геометрия оказывается более богатой, чем симплектическая геометрия, и в конечном счете именно на нее опираются все схемы интегрирования и квантования гамильтоновых систем [3].

В электродинамике пуассоновы многообразия появляются как обобщенные симплектические структуры [4], определяемые тензором электромагнитного поля. Пространства Максвелла являются 4-мерными многообразиями с определенными на них псевдоевклидовыми и обобщенными симплектическими (пуассоновыми) структурами [5]. Проведенная классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре [5] выявила большое число таких пространств, исследование которых с точки зрения пуассоновой геометрии было бы интересно.

Одним из важнейших объектов, связанных с пуассоновой структурой на многообразии, является симплектический лист — симплектическая структура на подмногообразии. В монографии [5] рассмотрены примеры

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: miledien@mail.ru.
[2]Ивановская государственная текстильная академия, Ивановский государственный университет; E-mail: mihailparinov@mail.ru.

нахождения симплектических листов в случае однородных пространств Максвелла вырожденных типов, кулоновского поля, поля плоской монохроматической волны и поля, образованного постоянным током, текущим по бесконечному прямолинейному проводнику.

В настоящей работе мы исследуем симплектические листы пуассоновых многообразий для классов пространств Максвелла с нулевым током $W_{4,19}$ и $W_{3,15}$, найденных в работе [6].

2. Симплектические листы пуассоновых многообразий

Пусть M — гладкое вещественное многообразие, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ — пространство всех гладких вещественных функций на M. Если на $\mathcal{F}(M)$ задана билинейная кососимметричная операция $\{\cdot\,,\cdot\}$, которая является дифференцированием по отношению к умножению функций,

$$\{fg,\, h\} = f\{g,\, h\} + g\{f,\, h\},$$

и удовлетворяет тождеству Якоби

$$\{\{f,\, g\},\, h\} + \{\{g,\, h\},\, f\} + \{\{h,\, f\},\, g\} = 0,$$

то многообразие M называется *пуассоновым*, а $\mathcal{F}$ — *пуассоновой алгеброй.*

Скобка Пуассона задается некоторым бивекторным полем Ω:

$$\{f,\, g\} = \Omega(df,\, dg) = \Omega^{ij}\,\partial_j f\,\partial_i g,$$

где $\Omega^{ij} = -\Omega^{ji} = \Omega^{ij}(x)$ $(x \in M)$.

Ранг бивектора Ω — функция точки: $r(x) = \operatorname{rank}\,\Omega^{ij}(x)$.

Если $r(x) = \mathrm{const}$ для $\forall\, x \in M$, то говорят, что скобка Пуассона имеет *постоянный ранг* на M.

Если $r(x) = \dim M$ для $\forall\, x \in M$, то скобка называется *невырожденной.* В этом случае размерность M четна, M называется *симплектическим многообразием*, а замкнутая невырожденная 2-форма

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j,\ \ (\omega_{ij}) = (\Omega^{ij})^{-1},$$

называется *симплектической структурой.*

Если $r(x) = \mathrm{const} < \dim M$, то определены *симплектические листы* — *симплектические структуры* на интегральных многообразиях распределения $\pi(x) = \operatorname{Ker}\Omega(x)^{\perp}$, где

$$\Omega : T^*M \to TM,\ \ \Omega(x) : T^*_x M \to T_x M,\ \ \partial_i f \mapsto \xi^i = \Omega^{ij}(x)\partial_j f$$

(здесь T_xM и T^*_xM — касательное и кокасательное пространства к многообразию M в точке x, TM и T^*M — его касательное и кокасательное расслоения, f — скалярная функция на M, Ker — ядро оператора, $^{\perp}$ — прямое дополнение).

3. Пространства Максвелла

Пространство Максвелла — тройка (M, g, F), где M — гладкое четырехмерное многообразие, $g = g_{ij}\,dx^i dx^j$ — псевдоевклидова метрика лоренцевой сигнатуры $(- - -+)$, а $F = \frac{1}{2} F_{ij}\,dx^i \wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура (замкнутая дифференциальная 2-форма) на M; F_{ij} интерпретируется как тензор электромагнитного поля

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -H_3 & H_2 & -E_1 \\ H_3 & 0 & -H_1 & -E_2 \\ -H_2 & H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ и $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ — векторы электрической и магнитной напряженности.

3.1. Алгебраические типы пространств Максвелла. В каждой точке $x \in M$ однозначно определяется тип пространства Максвелла в зависимости от набора инвариантов

$$\begin{gathered} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = E_1 H_1 + E_2 H_2 + E_3 H_3, \\ \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 = \left(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2\right) - \left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Корни характеристического многочлена

$$\chi(\lambda) = \det(F_{i\cdot}^{\cdot j} - \lambda \delta_i^j) = \lambda^4 + \left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right)\lambda^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2$$

для матрицы $F_{i\cdot}^{\cdot j} = F_{ik} g^{kj}$ линейного оператора[1]

$$\hat{F}_x : T_x M \to T_x M \quad (\xi \mapsto \eta), \quad \eta^i = F_{i\cdot}^{\cdot j} \xi^j, \tag{3}$$

могут быть только действительными или чисто мнимыми:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right) \pm \frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2 \right)^{1/2} \right)^{1/2}.$$

В зависимости от соотношения инвариантов возможны следующие типы однородных пространств Максвелла.

I. *Вырожденный тензор* F*:* $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$. Одна пара корней — нули.

(I_1) $\mathbf{E}^2 > \mathbf{H}^2 : \lambda_{1,2} = \pm\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2\right)^{1/2}$, $\lambda_{3,4} = 0$.

(I_2) $\mathbf{E}^2 < \mathbf{H}^2 : \lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm i\left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right)^{1/2}$.

(I_3) $\mathbf{E}^2 = \mathbf{H}^2 : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

II. *Невырожденный тензор* F*:* $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \neq 0$. Все корни ненулевые — пара действительных, пара мнимых.

---

[1] $g_{ij} = \mathrm{diag}\,(-1, -1, -1, 1)$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$

С помощью преобразований из группы Лоренца в касательном псевдоевклидовом пространстве $(T_xM,\ g_{ij}(x))$ тензор F_{ij} можно привести к одной из следующих четырех канонических форм:

$$F_{ij}^{(\mathrm{II})} = \begin{pmatrix} 0 & -H & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix} \quad (E \neq 0, H \neq 0), \tag{4}$$

$$F_{ij}^{(\mathrm{I}_1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix} \quad (E \neq 0), \tag{5}$$

$$F_{ij}^{(\mathrm{I}_2)} = \begin{pmatrix} 0 & -H & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (H \neq 0), \tag{6}$$

$$F_{ij}^{(\mathrm{I}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & -E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (E \neq 0). \tag{7}$$

В случае пространств Максвелла типов I_1, I_2 и II для отображения (3) существует разложение в сумму двух 2-мерных инвариантных подпространств V_r^2 и V_{im}^2, отвечающих парам действительных и мнимых корней:

$$T_xM = \mathbb{R}_1^4 = V_r^2 \oplus V_{im}^2. \tag{8}$$

В частности, для пространства типа I_1: $V_r^2 = \operatorname{Im}\hat{F}_x$ и $V_{im}^2 = \operatorname{Ker}\hat{F}_x$, а для пространства типа I_2: $V_r^2 = \operatorname{Ker}\hat{F}_x$ и $V_{im}^2 = \operatorname{Im}\hat{F}_x$. Во всех трех случаях плоскость V_r^2 псевдоевклидова, а V_{im}^2 — евклидова (сигнатуры $(--)$). Это легко проверить, используя канонические формы (4), (5) и (6).

В случае пространства Максвелла типа I_3 ядро и образ отображения $\hat{F}_x$ представляют собой 2-мерные изотропные плоскости, а их пересечение $\operatorname{Ker}\hat{F}_x \cap \operatorname{Im}\hat{F}_x$ есть изотропная прямая. Это следует из того, что для канонической формы (7)

$$\operatorname{Im}\hat{F}_x = \{(-\xi^3 - \xi^4,\ 0,\ \xi^1,\ -\xi^1)\}, \quad \operatorname{Ker}\hat{F}_x = \{(0,\ \xi^2,\ \xi^3,\ -\xi^3)\}.$$

3.2. Пространства Максвелла чистых вырожденных типов. Если тип не меняется от точки к точке, то говорим, что пространство Максвелла имеет *чистый тип*, в противном случае — *смешанный тип*. С пространствами Максвелла чистых вырожденных типов I_1, I_2 и I_3 однозначно связаны невырожденные симплектические структуры на 2-мерных многообразиях — симплектические листы.

Отображение

$$x \mapsto \operatorname{Ker}\hat{F}_x, \tag{9}$$

ставящее в соответствие каждой точке $x \in M$ ядро линейного оператора (3), есть 2-мерное инволютивное (и, следовательно, интегрируемое) распределение [5]. Максимальные интегральные многообразия (слои) этого распределения 2-мерны, попарно не пересекаются и заполняют, согласно теореме Фробениуса [2], все многообразие M. Обозначим любое такое многообразие N_0^2. Ограничение формы F на N_0^2 обращается в нуль: $F_{|N_0^2} = 0$.

Еще раз подчеркнем: *ограничение метрической формы* $g(\xi, \eta) = g_{ij}\xi^i\eta^j$ *на многообразия* N_0^2 *является для* $\forall\ x \in N_0^2$ *а) невырожденной отрицательно определенной формой для пространств типа* I_1*, б) невырожденной знакопеременной формой для пространств типа* I_2*, в) вырожденной неположительной формой для пространств типа* I_3. В частности, 2-мерные многообразия N_0^2 для электростатических полей являются римановыми, для магнитостатических — псевдоримановыми, для плоских электромагнитных волн — полуримановыми (изотропными).

Используя для (9) локальный вариант теоремы Фробениуса об интегрируемости инволютивного распределения [2], можно утверждать, что в M существует локальная система координат $\{\tilde{x}^i\}$, в которой слои N_0^2 задаются уравнениями

$$\tilde{x}^1 = \mathrm{const}, \quad \tilde{x}^2 = \mathrm{const}, \tag{10}$$

а координаты $\tilde{x}^1$ и $\tilde{x}^2$ нумеруют их, т. е. служат координатами в фактор-многообразии $N^2 = M/_{\sim}$ по отношению эквивалентности

$$x' \sim x'' \Longleftrightarrow \big(\tilde{x}^1(x') = \tilde{x}^1(x'')\big)\ \&\ \big(\tilde{x}^2(x') = \tilde{x}^2(x'')\big)\,.$$

В координатах $\{\tilde{x}^i\}$ тензор F_{ij} принимает вид

$$\tilde{F}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{F}_{12} & 0 & 0 \\ -\tilde{F}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $\tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{12}(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in M$, а симплектическая структура:

$$F = \tilde{F}_{12}\, d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2. \tag{12}$$

Таким образом, *в случае пространств Максвелла чистых вырожденных типов* I_1, I_2 *или* I_3 *их симплектические структуры приводятся к виду* (12). Другими словами, *с пространствами Максвелла чистых вырожденных типов однозначно связаны невырожденные симплектические структуры на 2-мерных многообразиях* N^2 *— симплектические листы.*

Используя теорему Дарбу можно прийти к выводу о существовании в M локальной системы координат $\{\bar{x}^i\}$, в которой

$$F = d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2, \tag{13}$$

а симплектические листы задаются следующим образом:

$$N^2 = \{x = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4) :\ \bar{x}^3 = \mathrm{const},\ \bar{x}^4 = \mathrm{const}\}. \tag{14}$$

4. Примеры симплектических листов для пространств Максвелла с нулевым током

4.1. Класс ПМНТ $W_{4,19}$. Этот класс задается тензором F_{ij} вида [6]

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \frac{Kx^1}{u^3}, \quad F_{23} = \frac{Kx^2}{u^3}, \quad F_{34} = \frac{Kx^4}{u^3}, \tag{15}$$

где $u = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^4)^2}$ и $K = \mathrm{const}$; он соответствует группе симметрий $G_{4,19}$ (алгебре Ли векторных полей $\mathcal{L}_{4,19} = L\{e_{12},\ e_{14},\ e_{24},\ e_3\}$). Эти пространства имеют тип I_2.

В координатах $\{u,\ \varphi,\ x^3,\ \psi\}$, связанных с галилеевыми координатами $\{x^i\}$ формулами

$$x^1 = u\cos\varphi\,\mathrm{ch}\,\psi, \quad x^2 = u\sin\varphi\,\mathrm{ch}\,\psi, \quad x^4 = r\,\mathrm{sh}\,\psi, \tag{16}$$

имеем следующие выражения для F и g:

$$F = \frac{K}{u^2}\,du\wedge dx^3, \quad g = -du^2 - \left(dx^3\right)^2 + u^2\left(d\psi^2 - \mathrm{ch}^2\psi\,d\varphi^2\right). \tag{17}$$

В результате замены $\tilde{u} = -K/u$ получим

$$F = d\tilde{u}\wedge dx^3, \quad g = -\left(dx^3\right)^2 - \frac{K^2}{\tilde{u}^4}\left(d\tilde{u}^2 + \tilde{u}^2\left(\mathrm{ch}^2\psi\,d\varphi^2 - d\psi^2\right)\right). \tag{18}$$

Сужение метрики на многообразие

$$N_0^2 = \{(\tilde{u},\ \varphi,\ x^3,\ \psi) : \tilde{u} = \mathrm{const},\ x^3 = \mathrm{const}\} \tag{19}$$

есть знакопеременная форма

$$g_{|N_0^2} = \frac{K^2}{\tilde{u}^2}\left(d\psi^2 - \mathrm{ch}^2\psi\,d\varphi^2\right), \tag{20}$$

а на многообразие $N^2 = \{(\tilde{u},\ \varphi,\ x^3,\ \psi) : \varphi = \mathrm{const},\ \psi = \mathrm{const}\}$ — отрицательно определенная форма

$$g_{|N^2} = -\left(dx^3\right)^2 - \frac{K^2}{\tilde{u}^4}\,d\tilde{u}^2, \tag{21}$$

т. е. симплектические листы являются двумерными римановыми многообразиями (сигнатуры $(--)$).

4.2. Класс ПМНТ $W_{3,15}$. Он задается тензором F_{ij} вида [6]

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{B}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ &F_{23} = -F_{34} = \frac{A}{x^2 + x^4} \quad (A,\ B = \mathrm{const}) \end{aligned} \tag{22}$$

и соответствует группе симметрий $W_{3,15}$ с алгеброй Ли векторных полей $\mathcal{L}_{3,15} = L\{e_{12} - e_{14},\ e_{24},\ e_3\}$. Эти пространства имеют тип I_3.

К канонической форме (12) приводит следующая линейная замена координат:

$$\tilde{x}^1 = Ax^3 - Bx^1, \quad \tilde{x}^2 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^3 = Ax^3 + Bx^1, \quad \tilde{x}^4 = x^2 - x^4. \tag{23}$$

Формы F и g принимают вид:

$$F = \frac{1}{\tilde{x}^2}\, d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2, \tag{24}$$

$$g = -d\tilde{x}^2 d\tilde{x}^4 - \frac{A^2 + B^2}{4A^2B^2}[(d\tilde{x}^1)^2 + (d\tilde{x}^3)^2] - \frac{A^2 - B^2}{4A^2B^2} d\tilde{x}^1 d\tilde{x}^3. \tag{25}$$

Форма F вырождена на многообразиях N_0^2 — двумерных плоскостях в пространстве Минковского:

$$N_0^2 = \{(\tilde{x}^1,\, \tilde{x}^2,\, \tilde{x}^3,\, \tilde{x}^4) : \tilde{x}^1 = \mathrm{const},\, \tilde{x}^2 = \mathrm{const}\}. \tag{26}$$

Ограничение метрической формы на N_0^2 — вырожденная неположительная форма:

$$g_{|N_0^2} = -\frac{A^2 + B^2}{4A^2B^2}(d\tilde{x}^3)^2 \tag{27}$$

(плоскости N_0^2 изотропны). Замена

$$\bar{x}^1 = \tilde{x}^1, \quad \bar{x}^2 = \ln \tilde{x}^2, \quad \bar{x}^3 = \tilde{x}^3, \quad \bar{x}^4 = \tilde{x}^4 \tag{28}$$

приводит форму F к виду (13); ограничения g на N_0^2 и

$$N^2 = \{(\tilde{x}^1,\, \tilde{x}^2,\, \tilde{x}^3,\, \tilde{x}^4) : \tilde{x}^3 = \mathrm{const},\, \tilde{x}^4 = \mathrm{const}\} \tag{29}$$

в координатах $\{\bar{x}^i\}$ имеют вид

$$g_{|N_0^2} = -\frac{A^2 + B^2}{4A^2B^2}(d\bar{x}^3)^2 \tag{30}$$

и

$$g_{|N^2} = -\frac{A^2 + B^2}{4A^2B^2}(d\bar{x}^1)^2. \tag{31}$$

Очевидно, что обе формы вырождены и неположительны; таким образом, оба семейства N_0^2 и N^2 состоят из изотропных двумерных плоскостей.

Список литературы

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 460 с.
2. *Бишоп Р. Л. Криттенден Р. Дж.* Геометрия многообразий. – М: Мир., 1967. – 335 с.
3. *Карасев М. В., Маслов В. П.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. – М.: Наука, 1991. – 368 с.

4. *Паринов М. А.* Введение в симплектическую геометрию: Учеб. пособие. – Иваново: ИвГУ, 1994. – 60 с.

5. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.

6. *Паринов М. А.* Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие подгруппы группы Пуанкаре размерностей 3–6 // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2009. – Вып. 1 (6). – С. 83–102.

Поступила в редакцию 20.12.2011.