Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 85 – 94.

УДК 517.954

Е. В. Петрова[1], **В. В. Провоторов**[2]

Обобщенная задача Неймана на графе-звезде

Ключевые слова: задача Неймана на графе, обобщенное решение, теорема единственности.

Осуществлено расширение понятия классического решения на пути перехода к обобщенному решению, принадлежащему к классу функций, интегрируемых с квадратом. Получены ограничения на функции, задающие краевые условия, которые гарантируют единственность обобщенного решения задачи Неймана для волнового уравнения на графе-звезде; они также гарантируют единственность обобщенного решения более общих краевых задач.

Keywords: the Neumann problem on a graph, generalized solution, the uniqueness theorem.

We extend the notion of the classical solution for transition to generalized solution, which belongs to the class of square-integrable functions. We obtain restrictions on the functions, which set the boundary conditions, provided the uniqueness of generalized solution of the Neumann problem for the wave equation on a star graph; also these restrictions provide the uniqueness of the generalized solution of more general boundary value problems.

В настоящей работе расширяется понятие классического решения задачи Неймана для волнового уравнения на геометрическом графе с сохранением теоремы единственности. В конце 90-х годов открылась возможность более широкого взгляда на понятие обобщенных решений краевых задач – решений, являющихся функциями класса $\widehat{L}_2$ и не имеющих обобщенных производных. Класс функций $\widehat{L}_2(Q)$, введен Л. Н. Знаменской [2] для краевых задач, заданных на классическом прямоугольнике $Q = \{[0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]\}$, и он несколько уже обычного класса L_2, поскольку на функции класса $\widehat{L}_2$ накладываются дополнительные условия: их сужения при фиксированном x или t также принадлежат классу L_2. Результаты данной работы связаны с пространством $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$, $Q_{\Gamma,T} = \{(x,t) : x \in \Gamma \setminus \partial\Gamma, t \in (0,T), \Gamma$ – граф-звезда$\}$ (определение приведено ниже). Получены условия на функции краевых условий, гарантирующие единственность обобщенного решения класса $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$ задачи Неймана для волнового уравнения на графе-звезде.

1. Пусть Γ – граф-звезда, состоящий из m одинаковых ребер γ_k и одного внутреннего узла ξ. При этом ребра γ_k $(k = \overline{1, m-1})$ параметризованы отрезком $[0, \pi/2]$ (ориентация на ребрах “к узлу ξ”), ребро γ_m – отрезком $[\pi/2, \pi]$ (ориентация на ребре – “от узла ξ”). И пусть $R(\Gamma)$ – несвязное формальное объединение ребер графа – замкнутых отрезков (здесь и ниже используются понятия и обозначения монографий [2] и [5]).

[1]Воронежский государственный университет; E-mail: `pet-brov@mail.ru`.
[2]Воронежский государственный университет; E-mail: `wwprov@mail.ru`.

Обозначим через $C(\Gamma)$ множество непрерывных на Γ функций, $C[\Gamma]$ – множество кусочно непрерывных функций (непрерывность на ребрах, пределы в узле по разным ребрам могут быть различными), $C^2[\Gamma]$ – множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$. Сужение функции $f(x)$ на ребро γ графа обозначим через $f(x)_\gamma$.

Введем следующие пространства функций:

$$H[0,T] = \{h(t) \in C^2[0,T]:\ h(T) = h'(T) = 0,\ T < \infty\},$$

$$F(\Gamma) = \{f(x) \in C^2[\Gamma]:\ f(0)_{\gamma_k} = f(\pi)_{\gamma_m} = 0,\ k = \overline{1,\, m-1}\};$$

пространства, сопряженные к $H[0,T]$, $F(\Gamma)$, обозначим соответственно $H'[0,T]$, $F'(\Gamma)$. Для обобщенных функций из $H'[0,T]$ и $F'(\Gamma)$ введем понятие первообразной.

Определение 1. Функция $g^*(t) \in L_2[0,T]$ такая, что $g^*(t)$ непрерывна в нуле и $g^*(0) = 0$, называется *первообразной обобщенной функции* $g \in H'[0,T]$, если для $\forall\ h(t) \in H[0,T]$ выполняется равенство

$$(g^*, h') = -\langle g, h\rangle,$$

где

$$(g^*, h') = \int\limits_0^T g^*(t), h'(t)dt,$$

а символ $\langle g, h\rangle$ обозначает действие функционала g на пробных функциях h указанного класса.

Совокупность элементов g пространства $H'[0,T]$, для которых существуют первообразные g^*, обозначим через $(H')^*[0,T]$.

Определение 2. Функция $q^*(x) \in L_2(\Gamma)$ такая, что $q^*(x)$ непрерывна в каждой точке $\pi/2 \in \gamma_k (k = \overline{1,\, m})$ и $g^*(\pi/2) = 0$, называется *первообразной обобщенной функции* $q \in F'(\Gamma)$, если для $\forall\ f(x) \in F(\Gamma)$ выполняется равенство

$$(q^*, f') = -\langle q, f\rangle,$$

где

$$(q^*, f') = \int\limits_\Gamma q^*(x) f'(x)dx = \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_0^{\pi/2} q^*(x)_{\gamma_k} f'(x)_{\gamma_k}dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} q^*(x)_{\gamma_m} f'(x)_{\gamma_m}dx,$$

а символ $\langle q, f\rangle$ обозначает действие функционала q на пробных функциях f класса $F(\Gamma)$.

Совокупность элементов q пространства $F'(\Gamma)$, для которых существуют первообразные q^*, обозначим через $(F')^*(\Gamma)$.

2. Колебания на каждом из ребер графа Γ при произвольном значении времени t описываются уравнениями

$$\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} = a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} \tag{1}$$

внутри каждого ребра γ_k ($k=\overline{1,\,m}$), $t\in(0,T)$, и соотношениями в узле ξ – условиями непрерывности и гладкости:

$$\begin{array}{l} \Omega(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_k} = \Omega(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_m}\ (k=\overline{1,\,m-1}),\\ \sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\Omega(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_k} = \frac{\partial}{\partial x}\Omega(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_m}, \end{array}\qquad t\in(0,T). \tag{2}$$

К соотношениям (1), (2) добавляются начальные условия при $x\in\Gamma$, $t=0$:

$$\Omega(x,0)=\varphi(x),\ \ \tfrac{\partial}{\partial t}\Omega(x,0)=\psi(x), \tag{3}$$

и граничные условия в граничных узлах графа (условия Неймана):

$$\tfrac{\partial}{\partial x}\Omega(0,t)_{\gamma_k} = \mu_k(t)\ (k=\overline{1,\,m-1}),\quad \tfrac{\partial}{\partial x}\Omega(\pi,t)_{\gamma_m}=\nu(t),\quad t\in[0,T]; \tag{4}$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_k(t)$, $\nu(t)$ – заданные функции.

Обозначим через $Q_{\Gamma,T}$ и $Q_{R(\Gamma),T}$ области вида

$$\begin{array}{l} Q_{\Gamma,T} = \{(x,t):\, x\in\Gamma\setminus\partial\Gamma,\, t\in(0,T)\},\\ Q_{R(\Gamma),T} = \{(x,t):\, x\in R(\Gamma),\, t\in[0,T]\}. \end{array}$$

Совокупность функций $\eta(x,t)$, два раза непрерывно дифференцируемых вплоть до границы области $Q_{R(\Gamma),T}$, обозначим через $C^2(Q_{R(\Gamma),T})$; $C^2_\xi(Q_{R(\Gamma),T})$ – множество функций $\eta(x,t)\in C^2(Q_{R(\Gamma),T})$, удовлетворяющих соотношениям (2) в узле ξ графа Γ.

Пусть $L_2(Q_{\Gamma,T})$ – пространство измеримых на $Q_{\Gamma,T}$ функций, суммируемых с квадратом. Все дальнейшие рассуждения проводятся для функций из пространства $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$: функция $\eta(x,t)$ принадлежит пространству $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$, если она принадлежит пространству $L_2(Q_{\Gamma,T})$, а также пространству $L_2(\Gamma)$ при любом $t\in[0,T]$ и пространству $L_2[0,T]$ при любом $x\in\Gamma$.

Обозначим через $\widehat{L}_{2,\,\xi}(Q_{\Gamma,T})$ множество функций $\eta(x,t)\in\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$, удовлетворяющих соотношениям (2) в узле ξ графа Γ, причем первое соотношение (2) выполняется в смысле равенства элементов $L_2[0,T]$, второе соотношение (2) – в смысле равенства элементов $(H')^*[0,T]$. Очевидно, что $\widehat{L}_{2,\,\xi}(Q_{\Gamma,T})\subset\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$.

Если $\Omega(x,t)\in C^2_\xi(Q_{R(\Gamma),T})$ – решение краевой задачи (1)–(4), то для любой функции $\omega(x,t)\in C^2_\xi(Q_{R(\Gamma),T})$ справедливо равенство

$$\int\!\!\int\limits_{Q_{\Gamma,T}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)\right)\omega(x,t)dx\,dt=0.$$

Вычислим интеграл в этом соотношении два раза по частям:

$$
\begin{aligned}
&\int\int\limits_{Q_{\Gamma,T}} \Omega(x,t)\left(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\omega(x,t)-a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t)\right)dx\,dt+\\
&+\int\limits_{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\Omega(x,T)\omega(x,T)-\Omega(x,T)\tfrac{\partial}{\partial t}\omega(x,T)\right)dx-\\
&-\int\limits_{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\Omega(x,0)\omega(x,0)-\Omega(x,0)\tfrac{\partial}{\partial t}\omega(x,0)\right)dx-\\
&-a^2\int\limits_0^T\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\Omega(\pi,t)_{\gamma_m}\omega(\pi,t)_{\gamma_m}-\sum_{k=1}^{m-1}\tfrac{\partial}{\partial x}\Omega(0,t)_{\gamma_k}\omega(0,t)_{\gamma_k}\right)dt+\\
&+a^2\int\limits_0^T\left(\Omega(\pi,t)_{\gamma_m}\tfrac{\partial}{\partial x}\omega(\pi,t)_{\gamma_m}-\sum_{k=1}^{m-1}\Omega(0,t)_{\gamma_k}\tfrac{\partial}{\partial x}\omega(0,t)_{\gamma_k}\right)dt=0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(здесь $\int\limits_{\Gamma}p(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_{\gamma_k}p(x)_{\gamma_k}dx)$. Потребуем от функции $\omega(x,t)$ выполнения следующих равенств

$$
\omega(x,T)=0,\ \frac{\partial}{\partial t}\omega(x,T)=0,\ x\in\Gamma, \tag{6}
$$

и

$$
\frac{\partial}{\partial x}\omega(0,t)_{\gamma_k}=0\ (k=\overline{1,\,m-1}),\ \ \frac{\partial}{\partial x}\omega(\pi,t)_{\gamma_m}=0,\ \ t\in[0,T]. \tag{7}
$$

Интегральное соотношение (5) будем использовать для определения обобщенного решения краевой задачи (1)–(4). Пусть выполняются следующие предположения, определяющие начальные и граничные условия (3), (4) краевой задачи:

$$
\varphi(x)\in L_2(\Gamma),\ \psi\in(F')^*(\Gamma),\ \mu_k\ (k=\overline{1,\,m-1}),\ \nu\in(H')^*[0,T]. \tag{8}
$$

Определение 3. *Обобщенным решением* (решением из класса $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$) краевой задачи (1)–(4) называется функция $\Omega(x,t)\in\widehat{L}_{2,\xi}(Q_{\Gamma,T})$, для которой равенство

$$
\begin{aligned}
&\int\int\limits_{Q_{\Gamma,T}}\Omega(x,t)\left[\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\omega(x,t)-a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t)\right]dx\,dt+\\
&+\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\tfrac{\partial}{\partial t}\omega(x,0)dx-\langle\psi(\cdot)\omega(\cdot,0)\rangle-\\
&-a^2\left[\langle\nu(\cdot)\omega(\pi,\cdot)_{\gamma_m}\rangle-\sum_{k=1}^{m-1}\left\langle\mu_k(\cdot)\tfrac{\partial}{\partial x}\omega(0,\cdot)_{\gamma_k}\right\rangle\right]=0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

верно для всех функций $\omega(x,t)\in C^2_\xi(Q_{R(\Gamma),T})$ с условиями (6), (7) и для которой первое начальное условие (3) выполняется в смысле равенства элементов $L_2(\Gamma)$, второе начальное условие (3) и граничные условия (4) – в смысле равенства элементов $(F')^*(\Gamma)$ и $(H')^*[0,T]$, соответственно.

Замечание 1. В связи с предлагаемым исследованием следует отметить работу [4], где, по-видимому, впервые изучалась полугруппа, возникающая при анализе эволюционных процессов на пространственных сетях: рассматривалась эволюционная задача $u'_t=Lu$, $u(0)=\varphi\in W^1_0(\Gamma)$, где

Γ – произвольный геометрический граф, L – симметричный оператор в $L_2(\Gamma)$, допускающий самосопряженное расширение $\widetilde{L} : W_0^1(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$, пространство $W_0^1(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ – аналог соболевского пространства – определяется как пополнение множества $C_0^2[\Gamma]$ по норме, порожденной соответствующим скалярным произведением[1]. Для этой задачи установлена слабая разрешимость как следствие того, что оператор $\widetilde{L}$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы в $L_2(\Gamma)$ [7]. Если представить динамическую задачу (1)–(4) в виде[2]

$$u_t'' = Lu, \quad u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi,$$

то следует ожидать результатов, упомянутых выше, при условиях, позволяющих расширение оператора L до самосопряженного $\widetilde{L}$, что достигается эффективным описанием области определения оператора $\widetilde{L}$ соответствующим пространством соболевского типа, получаемом при замыкании оператора L (множество $C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma]$ плотно в $L_2(\Gamma)$). С другой стороны анализ краевой задачи (1)–(4) можно осуществлять, следуя [1], и на пути построения обобщенного решения $u(x,t)$, $(x,t) \in \Gamma \times [0,T]$, как предела последовательности классических решений $u_n(x,t)$, $n = 1, 2, \ldots$, задачи (1)–(4) ($\varphi = \varphi_n$, $\psi = \psi_n$, $\mu_k = \mu_{k\,n}$, $\nu = \nu_n$), сходящейся к $u(x,t)$ в $L_2(\Gamma)$ равномерно по t на $[0,T]$. В этом случае обобщенное решение $u(x,t)$ будет удовлетворять интегральному тождеству, аналогичному (9) для всех гладких финитных функций ω, $\operatorname{supp}\omega \subset (\Gamma \backslash V) \times (0,T)$ (V – множество узлов графа Γ), и иметь все обобщенные производные первого порядка, непрерывные в $L_2(\Gamma)$ по t на $[0,T]$. В приведенных трактовках краевых задач рассмотрения ведутся в классах функций, обладающих обобщенными производными, суммируемыми по Γ, как и сами функции со вторыми степенями (пространства Соболева). В представленной работе делается попытка определить обобщенное решение (слабое решение) краевой задачи (1)–(4) в более широком смысле, исключающем наличие обобщенных производных решения $u(x,t)$. При этом не преследуется цель охватить широкий класс краевых задач на графах.

3. Ниже представлены формулировка и доказательство теоремы единственности обобщенного решения $\Omega(x,t) \in \widehat{L}_{2,\xi}(Q_{\Gamma,T})$ краевой задачи (1)–(4). Единственность обобщенного решения задачи (1)–(4) будем понимать в следующем смысле: если существуют два обобщенных решения задачи (1)–(4), то их разность есть нулевой элемент пространства $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$. Доказательство проведем, следуя схеме рассуждений, изложенной в работе В. А. Ильина [3] (см. также [2], гл. 3, § 2).

Теорема. *Обобщенное решение* $\Omega(x,t) \in \widehat{L}_{2,\xi}(Q_{\Gamma,T})$ *краевой задачи* (1)–(4) *единственно.*

[1] $C_0^2[\Gamma]$ – множество функций из $C^2[\Gamma]$, равных нулю на $\partial\Gamma$, описание множества $C^2[\Gamma]$ приведено ниже.

[2] Симметричный оператор $L : C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma] \subset L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ порожден нижеприведенной задачей Штурма–Лиувилля (12)–(15).

Доказательство. Пусть существуют два решения $\Omega_1(x,t)$, $\Omega_2(\pi,t)$ из пространства $\widehat{L}_{2,\xi}(Q_{\Gamma,T})$ краевой задачи (1)–(4), тогда их разность $\Omega(x,t)\in\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$ является решением краевой задачи

$$\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k}=a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k},\ \ (x,t)\in Q_{\Gamma,T},$$

$$\Omega(x,0)=0,\ \ \tfrac{\partial}{\partial t}\Omega(x,0)=0,\ \ x\in\Gamma,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial x}\Omega(0,t)_{\gamma_k}=0\ (k=\overline{1,\,m-1}),\quad \tfrac{\partial}{\partial x}\Omega(\pi,t)_{\gamma_m}=0,\ \ t\in[0,T],$$

причем верно тождество

$$\iint\limits_{Q_{\Gamma,T}}\Omega(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\omega(x,t)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t)\right)dx\,dt=0 \tag{10}$$

для любой функции $\omega(x,t)\in C^2(Q_{R(\Gamma),T})$, удовлетворяющей условиям (6), (7). Покажем, что функция $\Omega(x,t)=0$ п. в. на $Q_{\Gamma,T}$.

Продолжим функцию $\Omega(x,t)$ нулем на область $\{t<0\}$, на область $\{t>T\}$ – произвольным образом с сохранением класса. Предполагая, что $\omega(x,t)=0$ при $t>T$ и $\omega(x,t)$ – произвольная класса C^2 при $\{t<0\}$, перепишем равенство (10) в виде

$$\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\omega(x,t)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t)\right)dx\,dt=0. \tag{11}$$

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля на звезде Γ в $C(\Gamma)\cap C^2[\Gamma]$ (см. [5] и [6]), задаваемую уравнениями

$$-y''_{\gamma_k}=\lambda y_{\gamma_k}\ \ (k=\overline{1,\,m-1}) \tag{12}$$

на ребрах γ_k при фиксированной параметризации, уравнением в узле ξ

$$\sum_{k=1}^{m-1}y'(\pi/2)_{\gamma_k}=y'(\pi/2)_{\gamma_m} \tag{13}$$

и краевыми условиями

$$y'(0)_{\gamma_k}=0\ (k=\overline{1,\,m-1}), \tag{14}$$

$$y'(\pi)_{\gamma_m}=0; \tag{15}$$

здесь λ – спектральный параметр.

Имеют место следующие необходимые в дальнейшем утверждения, являющиеся следствием теорем 3 и 4 работы [6].

1. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (12)–(15) вещественны. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(\Gamma)$.

2. Множество $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ ($\lambda_n = n^2$) образует совокупность собственных чисел, при этом если n нечетное, то λ_n простое, при n четном – кратное, кратность его равна $m-1$.

Структура множества собственных функций, их представление определяются кратностью собственных значений:

а) при $n = 2l-1$ ($l = 1, 2, \dots$) λ_n простое, собственная функция имеет вид

$$u_{2l-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \left\{ \cos(2l-1)x, \text{ если } x \in \gamma_k, \ k = \overline{1, m}; \right. \tag{16}$$

б) при $n = 2l$ ($l = 1, 2, \dots$) λ_n кратное, собственные функции имеют вид

$$u_{2l}^1(x) = \tfrac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}}\cos 2lx, \text{ если } x \in \gamma_1, \\ 0, \text{ если } x \in \gamma_k, \ k = \overline{2, m-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{2}}\cos 2lx, \text{ если } x \in \gamma_m, \end{cases}$$

$$\underset{(i=\overline{2, m-2})}{u_{2l}^i(x)} = \tfrac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{i+1}}(-\frac{1}{\sqrt{i}})\cos 2lx, \text{ если } x \in \gamma_k, \ k = \overline{1, i-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{i+1}}\sqrt{i}\cos 2lx, \text{ если } x \in \gamma_i, \\ 0, \text{ если } x \in \gamma_k, \ k = \overline{i+1, m-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{i+1}}\frac{1}{\sqrt{i}}\cos 2lx, \text{ если } x \in \gamma_m, \end{cases} \tag{17}$$

$$u_{2l}^{m-1}(x) = \tfrac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{m-1}}\cos 2lx, \text{ если } x \in \gamma_k, \ k = \overline{1, m-2}, \\ \sqrt{m-1}\cos 2lx, \text{ если } x \in \gamma_{m-1}, \\ \frac{1}{\sqrt{m-1}}\cos 2lx, \text{ если } x \in \gamma_m. \end{cases}$$

Расположим собственные значения $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ по возрастанию так, чтобы каждое собственное значение входило в цепочку неравенств столько раз, какова его кратность. После переобозначений получим

$$\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3, \dots .$$

Каждому собственному значению цепочки соответствует своя собственная функция (16) или одна из (17). Такое множество функций обозначим $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$; очевидно, оно является ортонормальной системой собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (12)–(15).

Следующее утверждение [6], теорема 7, также будет использовано ниже.

3. Система собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ полна и образует ортогональный базис в $L_2(\Gamma)$.

Пусть $u_n(x)$ – одна из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (12)–(15), ρ_n – соответствующее ей собственное значение. Пусть $\omega(x,t) = u_n(x)f(t)$, где $f(t)$ – произвольная функция, дважды непрерывно дифференцируемая на $(-\infty, \infty)$, равная нулю при $t \geq t_0$, где t_0 – некоторое число: $t_0 < T$. Докажем равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x,t)f(t) = 0, \ \ x \in \Gamma. \tag{18}$$

Дальнейшее повторяет рассуждения работы [3]. Зафиксируем произвольное $\alpha \geq 0$. Тогда функция $f(t+\alpha)$ равна нулю при $t \geq t_0$, и в равенстве (11) можно взять вместо функции $f(t)$ функцию $f(t+\alpha)$. При этом будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\omega(x,t) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t) = u_n(x)\left(f''(t+\alpha) + \rho_n f(t+\alpha)\right). \qquad (19)$$

Положим

$$A_n(\alpha) = \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega(x,t)u_n(x)f(t+\alpha)dx\,dt. \qquad (20)$$

Функция $A_n(\alpha)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема при $\alpha \geq 0$. Из равенств (11) и (19) заключаем, что при $\alpha \geq 0$ функция $A_n(\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$A_n''(\alpha) + \rho_n A_n(\alpha) = 0,$$

из которого получим при $\alpha \geq 0$

$$A_n(\alpha) = C_n\cos n\alpha + D_n\sin n\alpha. \qquad (21)$$

Из представления (20) видно, что $A_n(\alpha) \equiv 0$ при $\alpha \geq t_0$ (т. к. $\Omega(x,t) = 0$ при $t < 0$). Но тогда в (21) $C_n = D_n = 0$ и, следовательно, при $\alpha \geq 0$

$$A_n(\alpha) = 0 \qquad (22)$$

при любом n.

Рассмотрим функцию

$$U(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega(x,t)f(t+\alpha)dt. \qquad (23)$$

Из равенств (20) и (22) заключаем, что функция (23) ортогональна на Γ ко всем собственным функциям $u_n(x)$ задачи Штурма–Лиувилля (12)–(15). Отсюда и в силу полноты системы $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ в $L_2(\Gamma)$ получим, что при любом фиксированном $\alpha \geq 0$

$$U(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega(x,t)f(t+\alpha)dt = 0.$$

Положим $\alpha = 0$ и получим требуемое равенство (18). Перепишем равенство (18) в виде

$$\int\limits_0^T\Omega(x,t)f(t)dt = 0, \quad x \in \Gamma. \qquad (24)$$

Заметим, что линейное многообразие $\Re[0,T]$ финитных функций класса $C^2[0,T]$ плотно в $L_2[0,T]$ и для каждого элемента $f(t)\in\Re[0,T]$ также выполняется равенство (24).

Из (24) вытекает равенство

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_0^T \Omega(x,t)f(t)dt\right)^2 dx=0,\quad \forall\ f(t)\in L_2[0,T]. \tag{25}$$

Покажем это. Возьмем последовательность функций $\{f_n(t)\}_{n\geq 1}\subset\Re[0,T]$, сходящуюся к $f(t)\in L_2[0,T]$. Используя соотношение (24) для $f_n(t)$ и неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_0^T \Omega(x,t)f(t)dt\right)^2 dx=\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_0^T \Omega(x,t)(f(t)-f_n(t))dt\right)^2 dx\leq$$
$$\leq\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_0^T \Omega^2(x,t)dt\int\limits_0^T\left(f(t)-f_n(t)\right)^2 dt\right)dx=$$
$$=\|\Omega\|^2_{L_2(Q_{\Gamma,T})}\|f-f_n\|^2_{L_2[0,T]}. \tag{26}$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в полученном соотношении, приходим к равенству (25).

В качестве последовательности $\{f_n(t)\}_{n\geq 1}\subset\Re[0,T]$ возьмем последовательность $\{\sin\frac{\pi n}{T}t\}_{n\geq 1}$. Для каждой функции $\sin\frac{\pi n}{T}t$ верно равенство (25), поэтому для каждого номера n существует множество Δ_n меры нуль такое, что для всех $x\in\Gamma$, не принадлежащих множеству Δ_n, справедливо равенство

$$\int\limits_0^T \Omega(x,t)\sin\frac{\pi n}{T}t\,dt=0. \tag{27}$$

Пусть Δ – множество меры нуль, полученное объединением всех Δ_n, $n=1,\,2,\,\ldots$. Тогда для всех номеров n и для всех точек $x\in\Gamma\backslash\Delta$ справедливо равенство (27). В силу полноты в $L_2[0,T]$ системы $\{\sin\frac{\pi n}{T}t\}_{n\geq 1}$ отсюда следует, что для всех точек $x\in\Gamma\setminus\Delta$ функция $\Omega(x,t)$ является нулевым элементом $L_2[0,T]$. Поэтому

$$\iint\limits_{Q_{\Gamma,T}}\Omega^2(x,t)dxdt=\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_0^T \Omega^2(x,t)f(t)dt\right)dx=0,$$

т. е. $\Omega(x,t)\in L_2(Q_{\Gamma,T})$. ■

Замечание 2. Заключение теоремы остается верным, если граничные условия (4) заменить на более общие:

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial t}\Omega(0,t)_{\gamma_k} + h_k\Omega(0,t)_{\gamma_k} = \mu_k(t),\ k = \overline{1,\, m-1}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\Omega(0,t)_{\gamma_m} - H\Omega(\pi,t)_{\gamma_m} = \nu(t), \end{matrix} \quad t \in [0,T]$$

(h_k и H – фиксированные положительные постоянные); эти условия выполняются в смысле равенства элементов $(H')^*[0,T]$. Пространство $(F')^*(\Gamma)$ является сопряженным к пространству $F(\Gamma)$:

$$F(\Gamma) = \{f(t) \in C^2[\Gamma] :\ f'(0)_{\gamma_k} - h_k f(0)_{\gamma_k} = \\ = f'(\pi)_{\gamma_m} + Hf(\pi)_{\gamma_m} = 0,\ k = \overline{1, m-1}\,\},$$

условия (7) заменяются на следующие:

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x}\omega(0,t)_{\gamma_k} - h_k\omega(0,t)_{\gamma_k} = 0,\ k = \overline{1,\, m-1}, \\ \frac{\partial}{\partial x}\omega(\pi,t)_{\gamma_m} + H\omega(\pi,t)_{\gamma_m} = 0. \end{matrix} \quad x \in [0,T].$$

На звезде Γ рассматривается задача Штурма – Лиувилля (12)–(15), у которой краевые условия (14), (15) заменены на следующие:

$$\begin{matrix} y'(0)_{\gamma_k} + hy(0)_{\gamma_k} = 0,\ k = \overline{1,\, m-1}, \\ y'(\pi)_{\gamma_m} - Hy(\pi)_{\gamma_m} = 0. \end{matrix}$$

Свойства 1 – 3 системы собственных функций такой задачи Штурма – Лиувилля сохраняются [6]. Доказательство теоремы отличается только выбором новой системы собственных функций.

Список литературы

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
2. *Знаменская Л. Н.* Управление упругими колебаниями. – М.: Физматлит, 2004. – 176 с.
3. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи матем. наук. – 1960. – Т. XV. – Вып. 2(92). – С. 97–154.
4. *Каменский М. И., Пенкин О. М., Покорный Ю. В.* О полугруппе в задачах диффузии на пространственной сети // Докл. РАН. – 1999. – Т. 368. – № 2. – С. 157–159.
5. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: Физматлит, 2004. – 227с.
6. *Провоторов В. В.* Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля на графе-звезде // Матем. сб. – 2008. – Т. 199. – № 10. – С. 105–126.
7. *Fattorini H. D.* Second order linear differential equations in Banach spaces. – Amsterdam, 1985. – 314 p.

Поступила в редакцию 27.12.2011.