Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 95 – 100.

УДК 512.543

А. В. Розов[1]

О финитной отделимости конечно порожденных подгрупп свободного произведения ограниченных разрешимых групп с нормальными объединенными подгруппами

Ключевые слова: ограниченная разрешимая группа, финитно отделимая подгруппа, обобщенное свободное произведение.

Доказано, что в свободном произведении ограниченных разрешимых групп с нормальными объединенными подгруппами все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

Keywords: bounded soluble group, finitely separable subgroup, generalized free product.

We prove that all finitely generated subgroups are finitely separable in a free product of bounded soluble groups with normal amalgamated subgroups.

1. Введение

Напомним, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если для каждого элемента a группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Это равносильно тому, что для каждого элемента a группы G, не принадлежащего H, в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что элемент a не принадлежит подгруппе HN. Понятие финитно отделимой подгруппы было введено А. И. Мальцевым в 1958 г. [1].

В работе [1] исследуется вопрос о финитной отделимости подгрупп в разрешимых группах и доказано, что в ограниченных разрешимых группах все подгруппы финитно отделимы. Напомним, что разрешимая группа называется ограниченной, если в ней существует субнормальный ряд с факторами, являющимися ограниченными абелевыми группами. Абелева группа A называется ограниченной, если все примарные компоненты ее периодической части $\tau(A)$ конечны, фактор-группа $A/\tau(A)$ имеет конечный ранг и никакая фактор-группа группы $A/\tau(A)$ не содержит квазициклических подгрупп.

Заметим, что условие финитной отделимости всех подгрупп является весьма жестким ограничением. Более естественным ограничением является финитная отделимость всех конечно порожденных подгрупп группы G.

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: `post-box023@mail.ru`.

Напомним, что группа G называется LERF-группой, если любая ее конечно порожденная подгруппа финитно отделима.

Исследование LERF-групп было начато М. Холлом в 1949 г. Он доказал, что все конечно порожденные подгруппы свободной группы финитно отделимы [5]. Другим примером LERF-группы может служить любая полициклическая группа. Это следует из упомянутого выше результата А. И. Мальцева.

В дальнейшем исследования LERF-групп распространились и на свободные конструкции. В частности, в [2] доказано, что свободное произведение LERF-групп является LERF-группой.

Заметим, что свободное произведение двух LERF-групп с объединенной подгруппой уже не обязано быть LERF-группой даже если оно финитно аппроксимируемо [6]. С другой стороны доказано [3], что свободное произведение двух LERF-групп с конечной объединенной подгруппой является LERF-группой.

Другим естественным ограничением на объединенную подгруппу является ее нормальность в свободных множителях. Здесь будет доказано, что свободное произведение двух ограниченных разрешимых групп с нормальной объединенной подгруппой является LERF-группой. В действительности нами доказан даже более общий результат.

Теорема 1. *Пусть G — свободное произведение групп A и B, являющихся конечными расширениями ограниченных разрешимых групп, с объединенной подгруппой W. Если в W существует подгруппа H конечного индекса нормальная в группах A и B, то группа G является LERF-группой.*

Очевидно, что любая полициклическая группа является ограниченной разрешимой группой. Поэтому частным случаем теоремы 1 является следующий результат Р. Алленби и Р. Грегораса [3].

Теорема 2. *Пусть G — свободное произведение двух почти полициклических групп A и B с объединенной подгруппой W. И пусть в W существует подгруппа H конечного индекса, нормальная в A и B. Тогда G — LERF-группа.*

Очевидно, что если все конечно порожденные подгруппы некоторой группы G финитно отделимы, то она сама финитно аппроксимируема. Поэтому следствием теорем 1 и 2 является известная теорема Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой [4].

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Следующее предложение содержит ряд свойств ограниченных разрешимых групп, сформулированных и доказанных в упомянутой выше работе [1].

Предложение 1. *Пусть G — ограниченная разрешимая группа. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Любая подгруппа группы G является ограниченной разрешимой группой.

2. Любая фактор-группа группы G является ограниченной разрешимой группой.

3. Если n — целое неотрицательное число и G^n — подгруппа группы G, порожденная n-ми степенями всех элементов G, то фактор-группа G/G^n конечна.

4. Все подгруппы группы G финитно отделимы.

В действительности эти свойства могут быть распространены на конечные расширения ограниченных разрешимых групп.

Предложение 2. *Пусть группа G является конечным расширением ограниченной разрешимой группы. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Любая подгруппа группы G является конечным расширением ограниченной разрешимой группы.

2. Любая фактор-группа группы G является конечным расширением ограниченной разрешимой группы.

3. Если n — целое неотрицательное число и G^n — подгруппа группы G, порожденная n-ми степенями всех элементов G, то фактор-группа G/G^n конечна.

4. Все подгруппы группы G финитно отделимы.

<u>Доказательство</u>. По условию в группе G существует нормальная подгруппа K конечного индекса, являющаяся ограниченной разрешимой группой.

1. Пусть H — подгруппа группы G. Поскольку фактор-группа $H/H \cap K$ изоморфна подгруппе HK/K конечной группы G/K, то $H \cap K$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы H, причем группа $H \cap K$ является ограниченной разрешимой группой как подгруппа ограниченной разрешимой группы K. Таким образом, H является конечным расширением ограниченной разрешимой группы $H \cap K$.

2. Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим подгруппу KH/H фактор-группы G/H. Она является ограниченной разрешимой группой, так как изоморфна фактор-группе $K/K \cap H$ ограниченной разрешимой группы K. Кроме того,

$$[G/H : KH/H] = [G : KH] \leq [G : K] < \infty.$$

Таким образом, группа G/H является конечным расширением ограниченной разрешимой группы KH/H.

3. Пусть n — целое неотрицательное число. Так как K — ограниченная разрешимая группа, то K^n — подгруппа конечного индекса группы K. Отсюда и из того, что K — подгруппа конечного индекса группы G следует, что K^n является подгруппой конечного индекса группы G. А поскольку $K^n \leq G^n$, то и G^n — подгруппа конечного индекса группы G, то есть фактор-группа G/G^n конечна.

4. Хорошо известно, что если в некоторой подгруппе конечного индекса произвольной группы все подгруппы финитно отделимы, то и в самой группе все подгруппы финитно отделимы. По предложению 1 все подгруппы группы K финитно отделимы. Поэтому и в группе G все подгруппы финитно отделимы. ■

Предложение 3. *Свободное произведение двух LERF-групп с конечной объединенной подгруппой является LERF-группой.*

Доказательство этого результата можно найти в [3].

3. Доказательство теоремы 1

Пусть A и B — конечные расширения ограниченных разрешимых групп,

$$G = (A * B, W)$$

— свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой W, H — подгруппа конечного индекса группы W такая, что H нормальна в A и B. И пусть X — конечно порожденная подгруппа группы G, $g \in G \setminus X$. Покажем, что существует гомоморфизм группы G на конечную группу при котором образ элемента g не принадлежит образу подгруппы X.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin XH$. Тогда $gH \notin XH/H$. Так как подгруппа H нормальна в G и имеет конечный индекс в W, то

$$G/H = (A/H * B/H, W/H)$$

— свободное произведение групп A/H и B/H с конечной объединенной подгруппой W/H. Заметим, что по предложению 2 фактор-группы A/H и B/H являются конечными расширениями ограниченных разрешимых групп. Из того же предложения следует, что все подгруппы групп A/H и B/H финитно отделимы. В частности, A/H и B/H — LERF-группы. Тогда по предложению 3 получаем, что G/H является LERF-группой. Следовательно, так как XH/H конечно порождена и $gH \notin XH/H$, то существует гомоморфизм

$$\rho : G/H \to F$$

в некоторую конечную группу F, такой, что $(gH)\rho \notin (XH/H)\rho$. Пусть

$$\varphi : G \to G/H$$

— естественный гомоморфизм. Тогда $g\varphi = gH$, $X\varphi = XH/H$ и, следовательно, $g(\varphi\rho) \notin X(\varphi\rho)$. Таким образом, $\varphi\rho$ — искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in XH$. Тогда g можно записать в виде

$$g = xh, \tag{1}$$

где $x \in X$, $h \in H \setminus H \cap X$. Так как группа A является конечным расширением ограниченной разрешимой группы, то по предложению 2 группа H тоже является конечным расширением ограниченной разрешимой группы и в H все подгруппы, и в частности $H \cap X$, финитно отделимы. Поэтому для элемента h, не принадлежащего $H \cap X$, в группе H существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $h \notin (H \cap X) \cdot N$. Пусть $[H : N] = n$. Тогда $H^n \subseteq N$ и

$$h \notin (H \cap X) \cdot H^n. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $g \notin XH^n$. Действительно, допустим противное. Тогда $g \in XH^n$, т. е. элемент g представим в виде

$$g = x_1 h_1,$$

где $x_1 \in X$, $h_1 \in H^n$. Выше было сказано, что g представим еще и в виде (1). Имеем

$$xh = x_1 h_1,$$

откуда

$$x_1^{-1} x = h_1 h^{-1}.$$

Заметим, что левая часть последнего равенства принадлежит подгруппе X, а правая — подгруппе H. Поэтому обе они принадлежат подгруппе $H \cap X$. Обозначим элемент $h_1 h^{-1}$ группы $H \cap X$ через a. Тогда

$$h = a^{-1} h_1.$$

Так как $a^{-1} \in H \cap X$, а $h_1 \in H^n$, то $h \in (H \cap X) \cdot H^n$. Получили противоречие с (2).

Таким образом, $g \notin XH^n$ и, следовательно, $gH^n \notin XH^n/H^n$. Так как H^n характеристична в H и H нормальна в G, то H^n нормальна в G. Рассмотрим фактор-группу

$$G/H^n = (A/H^n * B/H^n, H/H^n).$$

Заметим, что по предложению 2 группы A/H^n и B/H^n являются конечными расширениями ограниченных разрешимых групп и все их подгруппы финитно отделимы. Поэтому сами они являются LERF-группами. Из п. 3 предложения 2 следует, что фактор-группа H/H^n конечна. Таким образом, группа G/H^n является свободным произведением двух LERF-групп с конечной объединенной подгруппой. Используя предложение 3, получаем, что G/H^n — LERF-группа.

Так как XH^n/H^n — конечно порожденная подгруппа группы G/H^n и $gH^n \notin XH^n/H^n$, то существует гомоморфизм

$$\rho : G/H^n \to F,$$

где F — некоторая конечная группа, такой, что $(gH^n)\rho \notin (XH^n/H^n)\rho$. Пусть

$$\varphi : G \to G/H^n$$

— естественный гомоморфизм. Тогда $g\varphi = gH^n$, $X\varphi = XH^n/H^n$ и, следовательно, $g(\varphi\rho) \notin X(\varphi\rho)$. Таким образом, $\varphi\rho$ — искомый гомоморфизм. Теорема доказана.

Автор благодарен Д. Н. Азарову за помощь при написании этой статьи.

Список литературы

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. – 1958. – Т. 18. – С. 49–60.
2. *Романовский Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Изв. АН СССР. Сер. Математика. – 1969. – Т. 33. – № 6. – С. 1324–1329.
3. *Allenby R. B. J. T., Gregorac R. J.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. – 1973. – Vol. 319. – P. 9–17.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 106. – P. 193–209.
5. *Hall M.* Coset representations of free groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 67. – P. 431–451.
6. *Rips E.* An example of non-LERF group, which is a free product of LERF groups with an amalgamated cyclic subgroup // Israel J. Math. – 1990. – Vol. 70. – P. 104–110.

Поступила в редакцию 28.11.2011.