Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 129 – 138.

УДК 517.946

Н. Г. Томин[1]

К обратной задаче спектрального анализа для одного класса дискретных операторов в гильбертовом пространстве

Ключевые слова: обратные задачи, гильбертово пространство, дискретный оператор, собственные числа, спектр.

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой μ, T — линейный неограниченный самосопряженный положительно-определенный дискретный в гильбертовом пространстве $H \equiv L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ оператор, на полную систему собственных чисел и соответствующую ортонормированную полную систему собственных функций которого налагаются определенные ограничения. Через P обозначаем оператор умножения в H на функцию $p \in H$. Доказывается, что при этих условиях возмущенный оператор $\tilde{T} = T+P$ также дискретен в H, и устанавливается некоторое соотношение между собственными числами операторов T и $\tilde{T}$. Это соотношение может служить основой для восстановления потенциала p в обратной задаче для степени оператора Лапласа на различных областях пространства $\mathbb{R}^n$, в том числе в случае кратного спектра.

Keywords: inverse problems, Hilbert space, discrete operator, eigenvalues, spectrum.

Suppose $(X, \mathcal{A}, \mu)$ is a σ-finite measure space and T is a linear unbounded self-adjoint positive definite discrete operator in $H \equiv L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ such that a complete system of eigenvalues and a corresponding complete orthonormal system of eigenfunctions of T satisfy certain restrictions. Let P be a multiplication operator by a function $p \in H$ in H. Under these conditions we prove that $\tilde{T} = T + P$ also is a discrete operator in H and we obtain a specific relation for eigenvalues of T and $\tilde{T}$. This relation can be a basis for the reconstruction of a potential p in the inverse problem for a power of the Laplace operator on different domains of $\mathbb{R}^n$, in particular, in case of multiple spectrum.

По тематике и применяемым методам настоящая статья близка к работам [3], [4] (см. также [2]).

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой μ, определенной на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества X. Для любого $p \in [1, +\infty]$ рассматриваем комплексное банахово пространство $L^p \equiv L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ с обычной нормой $\| \cdot \|_p$. Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $H = L^2$ обозначаем через $(\cdot, \cdot)$.

Пусть

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \le \dots \to +\infty$$

при $n \to \infty$, $U = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная полная система в H такая, что для $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $u_n \in L^{\infty}$ и

$$\|u_n\|_{\infty} \le A_1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

[1]Ивановская государственная текстильная академия;
E-mail: `nikolay.tomin@gmail.com`.

Введем действующий в гильбертовом пространстве H оператор

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\cdot, u_n)u_n$$

с областью определения

$$D(T) = \left\{ u \in H \;\Big|\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(u, u_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

Тогда T есть линейный неограниченный самосопряженный положительно-определенный оператор в H с собственными числами λ_n и соответствующими им собственными функциями u_n $(n \in \mathbb{N})$; $\sigma(T) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — спектр оператора T, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ — его резольвентное множество. Полагаем $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$; пусть ν_n — кратность собственного числа λ_n оператора T $(n \in \mathbb{N})$. Через $\{\lambda'_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначаем последовательность всех попарно различных собственных чисел оператора T, расположенных в порядке возрастания; ν'_n — кратность собственного числа λ'_n; $\Delta\lambda'_n = \lambda'_{n+1} - \lambda'_n$ для $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Будем предполагать, что для всех достаточно больших n выполняются следующие условия:

$$\Delta\lambda_n \neq 0 \Rightarrow \Delta\lambda_n \geq 2C_1\lambda_{n+1}^q \;\; (0 < q < 1,\ C_1 > 0); \tag{2}$$

$$\nu_n \leq C_2\lambda_n^{\beta} \quad (0 \leq \beta < q,\, C_2 > 0). \tag{3}$$

Условие (2) может быть записано в виде

$$\Delta\lambda'_n \geq 2C_1(\lambda'_{n+1})^q \quad (0 < q < 1,\ C_1 > 0), \tag{4}$$

а условие (3) — в виде

$$\nu'_n \leq C_2(\lambda'_n)^{\beta} \quad (0 \leq \beta < q,\, C_2 > 0). \tag{5}$$

Пусть P — оператор умножения на функцию $p(x)$ в H, где $p \in H$ и $D(P) = \{u \in H \mid p(x)u(x) \in H\}$. Из (1) следует, что для $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\|Pu_n\|_2 \leq A_1\|p\|_2 < +\infty.$$

Через $\mathfrak{T}^{\tau} \equiv \mathfrak{T}^{\tau}(H)$ при $1 \leq \tau < +\infty$ обозначаем банахово (при $p = 2$ — гильбертово) пространство всех компактных в H линейных операторов A, для которых конечна норма $|A|_{\tau} = (\sum_{k=1}^{\infty} s_k^{\tau}(A))^{1/\tau}$, где $\{s_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ — убывающая к 0 последовательность s–чисел оператора A (см. [1]). В частности, $\mathfrak{T}^1$ есть пространство всех ядерных в H операторов, $\mathfrak{T}^2$ — пространство всех операторов Гильберта–Шмидта в H.

Пусть $\mathcal{B}(H)$ — банахово пространство всех ограниченных линейных операторов в H с обычной операторной нормой $\|\cdot\|$, E — единичный в H оператор. Далее, $R_{\lambda} = (T - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора T и

$$\tilde{R}_{\lambda} \equiv \tilde{R}_{\lambda}(p) = (\tilde{T} - \lambda E)^{-1} \;\; —$$

резольвента возмущенного оператора $\tilde{T} = T + P$. Полагаем $d_1 = \Delta\lambda'_1$, $d_n = \min\{\Delta\lambda'_{n-1}, \Delta\lambda'_n\}$ при $n \geq 2$. Через $Q_\lambda(p)$ обозначаем оператор PR_λ.

Покажем, что если $\omega + q > 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda'_n)^\omega}$$

сходится. Действительно, в этом случае для любого $n \geq 2$ с учетом (4) получаем

$$0 < \frac{1}{(\lambda'_n)^\omega} \leq \frac{\Delta\lambda'_{n-1}}{2C_1(\lambda'_n)^{\omega+q}} \leq \frac{1}{2C_1}\int_{\lambda'_{n-1}}^{\lambda'_n} \frac{d\lambda}{\lambda^{\omega+q}},$$

поэтому

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\lambda'_n)^\omega} \leq \frac{1}{2C_1}\int_{\lambda'_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{\omega+q}} < +\infty.$$

Лемма 1. *Если выполнены условия* (4) *и* (5), *то для любого* $\lambda \in \Omega$ *резольвента* R_λ *является ядерным в* H *оператором. Если, кроме того, выполняется условие* (1), *то для любого* $\lambda \in \Omega$ $Q_\lambda(p)$ *есть оператор Гильберта – Шмидта в* H *и*

$$|Q_\lambda(p)|_2 \leq A_1\|p\|_2|R_\lambda|_2. \tag{6}$$

Доказательство. Так как согласно (5) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu'_k}{\lambda'_k} \leq C_2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda'_k)^{1-\beta}}$$

и $\omega = 1 - \beta > 1 - q$, то при всех $\lambda \in \Omega$ резольвента R_λ является ядерным оператором в H.

Для любого $\lambda \in \Omega$ с учетом (1) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_\lambda(p)u_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|Pu_n\|_2^2}{|\lambda_n - \lambda|^2} \leq A_1^2\|p\|_2^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|^2} = A_1^2\|p\|_2^2|R_\lambda|_2^2,$$

поэтому $Q_\lambda(p) \in \mathfrak{T}^2$ и для его абсолютной нормы (нормы Гильберта – Шмидта) справедливо неравенство (6). ∎

Лемма 2. *При выполнении условий* (4) *и* (5) *для любого* $\lambda \in \Omega$ *справедливо неравенство*

$$|R_\lambda|_2^2 \leq \frac{\nu'_k}{|\lambda - \lambda'_k|^2} + \frac{C_3}{(\lambda'_k)^{2q-\beta}}, \tag{7}$$

где λ'_k *— ближайшее к* λ *собственное число оператора* T, *а постоянная* $C_3 > 0$ *не зависит от* λ.

Доказательство. Пусть $a_k = (\lambda'_k + \lambda'_{k+1})/2$ при $k \in \mathbb{N}$ и $a_0 = -\infty$. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $a_{k-1} < \operatorname{Re}\lambda \le a_k$. Отсюда с учетом (4) и (5) следует неравенство

$$|R_\lambda|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\nu'_j}{|\lambda - \lambda'_j|^2} \le \frac{\nu'_k}{|\lambda - \lambda'_k|^2} + \sum_{j\in\omega'_k} \frac{\nu'_j}{|\lambda - \lambda'_j|^2} + \frac{C_2}{2C_1} \sum_{j\in\omega_k} g_k(\lambda'_j) d_j, \quad (8)$$

где $g_k(x) = x^{-\delta}(b_k(x) - x)^{-2}$, $\delta = q - \beta \in (0, q] \subset (0, 1)$, $b_k(x) = a_k$ при $k \ge 1$ и $x > a_k$, $b_k(x) = a_{k-1}$ при $k \ge 2$ и $\lambda'_1 \le x < a_{k-1}$; $\omega_k = \mathbb{N}\setminus\{1, k-1, k, k+1\}$; $\omega'_1 = \{2\}$, $\omega'_k = \{1, k-1, k+1\}$ при $k \ge 2$.

Функция $g_k(x)$ положительна и непрерывна на промежутке $(a_k, +\infty)$ при $k \ge 1$ и на промежутке $[\lambda'_1, a_{k-1})$ при $k \ge 2$. При $k \ge 1$ функция $g_k(x)$ убывает на $(a_k, +\infty)$ от $+\infty$ до 0. При $k \ge 2$ функция $g_k(x)$ возрастает до $+\infty$ на промежутке $[x_k, a_{k-1})$, где $x_k = \max\{\lambda'_1, a_{k-1}\delta/(\delta+2)\}$ и, кроме того, при $x_k > \lambda'_1$ убывает на промежутке $[\lambda'_1, x_k]$. Учитывая эти свойства функции $g_k(x)$, неравенство $0 < \delta < 1$, неравенство (4) и неравенства $d_j \le \Delta\lambda'_{j-1}$ $(j \ge 2)$, $d_j \le \Delta\lambda'_j$ $(j \ge 1)$, получаем

$$\sum_{j\in\omega_k} g_k(\lambda'_j) d_j \le \int_{F_k} g_k(x)\,dx, \quad (9)$$

где $F_k = (\lambda'_1, \lambda'_{k-1}) \cup [\lambda'_{k+1}, +\infty)$ при $k \ge 4$ и $F_k = [\lambda'_{k+1}, +\infty)$ при $k = 1, 2, 3$.

При любом $k \in \mathbb{N}$ с помощью (4) находим

$$\int_{\lambda'_{k+1}}^{+\infty} \frac{dx}{(x - a_k)^2 x^\delta} \le \frac{1}{(\lambda'_{k+1})^\delta} \int_{\lambda'_{k+1}}^{+\infty} \frac{dx}{(x - a_k)^2} \le \frac{2}{(\lambda'_k)^\delta \Delta\lambda'_k} \le \frac{1}{C_1 (\lambda'_k)^{2q-\beta}}. \quad (10)$$

Далее, полагая $y = (a_{k-1} - x)/a_{k-1}$ с учетом эквивалентности

$$\int_v^1 \frac{dy}{(1-y)^\delta y^2} \sim \frac{1}{v} \quad (v \to +0)$$

при $v_{k-1} = \Delta\lambda'_{k-1}/(2a_{k-1}) = (\lambda'_k - \lambda'_{k-1})/(\lambda'_k + \lambda'_{k-1})$ получаем, что при всех $k \ge 4$

$$\int_{\lambda'_1}^{\lambda'_{k-1}} \frac{dx}{(a_{k-1} - x)^2 x^\delta} \le \frac{1}{a_{k-1}^{\delta+1}} \int_{v_{k-1}}^1 \frac{dy}{(1-y)^\delta y^2} \le \frac{C_4}{a_{k-1}^{\delta+1} v_{k-1}} \le \frac{C_5}{(\lambda'_k)^{2q-\beta}}, \quad (11)$$

где положительная постоянная $C_5 = 2^\delta C_4/C_1$ зависит от δ. При выводе последнего неравенства (11) использованы очевидные неравенства

$$a_{k-1}^{\delta+1} v_{k-1} = a_{k-1}^\delta \Delta\lambda'_{k-1}/2 \ge (\lambda'_k/2)^\delta \cdot C_1 (\lambda'_k)^q = C_1 2^{-\delta} (\lambda'_k)^{2q-\beta}.$$

Если $1 \le j \ne k$, то с учетом очевидного неравенства

$$|\lambda - \lambda'_j| \ge d_k/2 \ge C_1 (\lambda'_k)^q$$

получаем

$$\frac{\nu_j'}{|\lambda-\lambda_j'|^2} \le \frac{C_2(\lambda_j')^\beta}{|\lambda-\lambda_j'|^2} \le \frac{C_2}{C_1^2}\cdot\frac{1}{(\lambda_k')^{2q-\beta}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j\in\omega_k'} \frac{\nu_j'}{|\lambda-\lambda_j'|^2} \le \frac{3C_2}{C_1^2}\cdot\frac{1}{(\lambda_k')^{2q-\beta}}. \tag{12}$$

Из (8), (9), (10), (11) и (12) следует оценка (7). ■

Полагаем

$$\eta = \frac{(\lambda_1')^{q-\beta/2}}{2A_1\sqrt{C_6}},$$

$$\overline{\Omega}\,' = \{\lambda\in\mathbb{C}\mid |\lambda-\lambda_k'|\ge C_1(\lambda_k')^{\beta/2}\ \forall\ k\in\mathbb{N}\},$$

$$\Gamma_k = \{\lambda\in\mathbb{C}\mid |\lambda-\lambda_k'| = r_k\},$$

где

$$r_k = C_1(\lambda_k')^q,\quad C_6 = \frac{C_2}{C_1^2}+C_3.$$

Так как вследствие (4) имеем $C_1(\lambda_k')^{\beta/2}\le r_k\le d_k/2$, то $\Gamma_k\subset\overline{\Omega}\,'$.

Лемма 3. 1) *Если выполнены условия* (4) *и* (5), *то при любом* $k\in\mathbb{N}$ *и всех* $\lambda\in\Gamma_k$ *справедливы соотношения*

$$\|R_\lambda\| = \frac{1}{r_k} = \frac{1}{C_1(\lambda_k')^q},\quad |R_\lambda|_2^2 < \frac{C_6}{(\lambda_k')^{2q-\beta}}. \tag{13}$$

2) *Пусть выполняются условия* (1), (4), (5) *и* $\|p\|_2<\eta$. *Тогда всюду на* $\overline{\Omega}\,'$ *резольвента* $\tilde R_\lambda(p)$ *является ядерным в* H *оператором, причем для всех* $\lambda\in\overline{\Omega}\,'$ *и* $\tau\in[1,+\infty)$ *выполняются неравенства*

$$|Q_\lambda(p)|_2 \le \frac{\|p\|_2}{2\eta} < \frac{1}{2},\quad \|\tilde R_\lambda(p)\|\le 2\|R_\lambda\|,\quad |\tilde R_\lambda(p)|_\tau \le 2|R_\lambda|_\tau. \tag{14}$$

При этом $\tilde T$ *является дискретным оператором, и для последовательности* $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ *всех его комплексных собственных чисел, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей справедлива следующая оценка:*

$$|\mu_n-\lambda_n| < C_1\lambda_n^{\beta/2}. \tag{15}$$

Доказательство. 1) Первое соотношение (13) очевидно, второе же вытекает из леммы 2 и условий (4), (5).

2) Применяя (6) и второе неравенство (13), получаем, что при $\|p\|_2<\eta$ для любого λ из $\overline{\Omega}\,'$ выполняются неравенства

$$|Q_\lambda(p)|_2 \le A_1\|p\|_2\cdot\frac{\sqrt{C_6}}{(\lambda_k')^{q-\beta/2}} \le \frac{\|p\|_2}{2\eta} < \frac{1}{2}$$

и, следовательно, справедливо первое двойное неравенство (14).

Рассмотрим очевидное операторное тождество

$$\tilde{T} - \lambda E = [E + Q_\lambda(p)](T - \lambda E), \tag{16}$$

справедливое при всех $\lambda \in \Omega$ и, в частности, при всех $\lambda \in \overline{\Omega}\,'$. Из первой оценки (14) следует, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega}\,'$

$$\|Q_\lambda(p)\| < |Q_\lambda(p)|_2 < 1/2,$$

поэтому существует линейный, ограниченный в H, оператор

$$[E + Q_\lambda(p)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Q_\lambda^n(p). \tag{17}$$

Сходимость этого ряда по операторной норме (т. е. в $\mathcal{B}(H)$) является равномерной по $\lambda \in \overline{\Omega}\,'$, при этом

$$\|[E + Q_\lambda(p)]^{-1}\| < 2 \quad \forall\, \lambda \in \overline{\Omega}\,'.$$

Но тогда из (16) следует, что всюду на $\overline{\Omega}\,'$ существует линейный, ограниченный в H, оператор $\tilde{R}_\lambda(p) = R_\lambda[E + Q_\lambda(p)]^{-1}$. Так как линейный оператор (17) ограничен в H и, согласно лемме 1, резольвента R_λ является ядерным в H оператором, то отсюда получаем, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega}\,'$ резольвента $\tilde{R}_\lambda(p)$ также является ядерным в H оператором (и, следовательно, $\tilde{R}_\lambda(p) \in \mathfrak{T}^\tau(H)$ при всех $\tau \geq 1$) и с учетом (17) разлагается в равномерно по $\lambda \in \overline{\Omega}\,'$ сходящийся в $\mathcal{B}(H)$ и во всех банаховых пространствах $\mathfrak{T}^\tau$ ($\tau \geq 1$) ряд Неймана

$$\tilde{R}_\lambda(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R_\lambda Q_\lambda^n(p) \quad (\lambda \in \overline{\Omega}\,'). \tag{18}$$

Из (18) следуют последние две оценки (14).

3) Так как при $\lambda \in \overline{\Omega}'$ $\tilde{R}_\lambda(p)$ является компактным в H оператором, то $\tilde{T}$ — дискретный оператор в H, и его спектр $\sigma(\tilde{T})$ состоит из не более чем счетного набора собственных чисел конечной алгебраической кратности, не имеющего конечных предельных точек.

Из операторного тождества

$$\tilde{R}_\lambda(p) = R_\lambda - \tilde{R}_\lambda(p) Q_\lambda(p) \quad (\lambda \in \overline{\Omega}')$$

с учетом (14) при любом $k \in \mathbb{N}$ получаем следующую оценку нормы разности проекторов Рисса:

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} [\tilde{R}_\lambda(p) - R_\lambda]\, d\lambda \right\| \leq r_k \cdot \max_{\Gamma_k}[\|\tilde{R}_\lambda(p)\| \cdot \|Q_\lambda(p)\|] < r_k \cdot \frac{2}{r_k} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Поэтому у оператора $\tilde{T}$ имеется лишь счетное количество собственных чисел, и сумма алгебраических кратностей всех его собственных чисел, лежащих внутри окружности Γ_k, при любом $k \in \mathbb{N}$ равна кратности ν'_k собственного числа λ'_k. Отсюда следует, что если мы занумеруем натуральными числами все собственные числа μ_n оператора $\tilde{T}$ с учетом их алгебраических кратностей в порядке возрастания их вещественных частей, то получим выполнение условия (15), из которого, в частности, следует, что $\mu_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n}$$

сходится. ■

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* (1), (4), (5) *и* $\|p\|_2 < \eta$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо спектральное равенство*

$$\sum_{\lambda_n = \lambda'_k} [\mu_n - \lambda_n - (Pu_n, u_n)] = \beta_k(p) \tag{19}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{\lambda_n = \lambda'_k} \mu_n = \nu'_k \lambda'_k + \sum_{\lambda_n = \lambda'_k} (Pu_n, u_n) + \beta_k(p), \tag{20}$$

где

$$\beta_k(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} (\lambda'_k - \lambda) \operatorname{Sp} \left[\tilde{R}_\lambda(p) Q^2_\lambda(p) \right] d\lambda, \tag{21}$$

суммирование в (19) *и* (20) *осуществляется по всем натуральным* n, *для которых выполняется равенство* $\lambda_n = \lambda'_k$, *а интегрирование по контуру* Γ_k *производится в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки.*

Доказательство. Применим оператор следа к операторному тождеству

$$\tilde{R}_\lambda(p) = R_\lambda - R_\lambda Q_\lambda(p) + \tilde{R}_\lambda(p) Q^2_\lambda(p) \quad (\lambda \in \overline{\Omega}\,'),$$

после чего умножим обе части полученного равенства на $(\lambda'_k - \lambda)/(2\pi i)$ и проинтегрируем в положительном направлении по окружности Γ_k при любом $k \in \mathbb{N}$. Получим числовое равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} (\lambda'_k - \lambda) \operatorname{Sp} \tilde{R}_\lambda(p)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} (\lambda'_k - \lambda) \operatorname{Sp} R_\lambda \, d\lambda - \\ - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} (\lambda'_k - \lambda) \operatorname{Sp} [R_\lambda Q_\lambda(p)]\, d\lambda + \beta_k(p). \tag{22}$$

В силу известной теоремы В. Б. Лидского о совпадении матричного и спектрального следов ядерного оператора [1] получаем для $\forall\ \lambda \in \overline{\Omega}\,'$:

$$(\lambda_k' - \lambda)\,\mathrm{Sp}\,R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k' - \lambda}{\lambda_n - \lambda}, \quad (\lambda_k' - \lambda)\,\mathrm{Sp}\,\tilde{R}_\lambda(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k' - \lambda}{\mu_n - \lambda}. \tag{23}$$

Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$(R_\lambda Q_\lambda(p)u_n, u_n) = (Pu_n, u_n)/(\lambda_n - \lambda)^2,$$

то для любого $\lambda \in \Omega$ находим

$$(\lambda_k' - \lambda)\,\mathrm{Sp}\,[R_\lambda Q_\lambda(p)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k' - \lambda)(Pu_n, u_n)}{(\lambda_n - \lambda)^2}. \tag{24}$$

Все три ряда в правых частях формул (23) и (24) равномерно сходятся на окружности Γ_k при любом $k \in \mathbb{N}$ (ввиду их абсолютной сходимости и ограниченности множества Γ_k в $\mathbb{C}$).

Используя (23) и (24), в результате почленного интегрирования по Γ_k получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} (\lambda_k' - \lambda)\,\mathrm{Sp}\,\tilde{R}_\lambda(p)\,d\lambda = \sum_{\lambda_n = \lambda_k'} (\mu_n - \lambda_k') = \sum_{\lambda_n = \lambda_k'} \mu_n - \nu_k'\lambda_k', \tag{25}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} (\lambda_k' - \lambda)\,\mathrm{Sp}\,R_\lambda\,d\lambda = 0, \tag{26}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} (\lambda_k' - \lambda)\,\mathrm{Sp}\,[R_\lambda Q_\lambda(p)]\,d\lambda = \sum_{\lambda_n = \lambda_k'} (Pu_n, u_n). \tag{27}$$

Подставляя (25), (26), (27) в (22), убеждаемся в справедливости формул (19) и (20). ■

Лемма 5. *Пусть выполняются условия* (1), (4), (5) *и* $\|p_j\|_2 < \eta$ *при* $j = 1, 2$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$|\beta_k(p_1) - \beta_k(p_2)| \le C_7[\|p_1\|_2 + \|p_2\|_2] \cdot \|p_1 - p_2\|_2 \cdot \frac{1}{(\lambda_k')^{q-\beta}}, \tag{28}$$

где

$$C_7 = 4A_1^2 C_1 C_6.$$

Доказательство. Из (21) получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$|\beta_k(p_1) - \beta_k(p_2)| \le r_k^2 \max_{\Gamma_k} |\tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)Q_\lambda^2(p_2)|_1. \tag{29}$$

Далее, повторяя выкладки из доказательства леммы 5 работы [3] (см. также [4]) находим, что для любого $\lambda \in \Gamma_k$, также, как и в [3], справедливо неравенство

$$|\tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)Q_\lambda^2(p_2)| \le \\ \le |Q_\lambda(p_1 - p_2)|_2[\|\tilde{R}_\lambda(p_1)\| + \|\tilde{R}_\lambda(p_2)\|] \cdot [|Q_\lambda(p_1)|_2 + |Q_\lambda(p_2)|_2].$$

Отсюда с учетом (6), (13) и (14) следует, что левая часть этого неравенства не превосходит числа

$$4A_1^2\|R_\lambda\| \cdot |R_\lambda|_2^2 \cdot [\|p_1\|_2 + \|p_2\|_2]\|p_1 - p_2\|_2 \le \\ \le \frac{4A_1^2}{C_1(\lambda_k')^{3q-\beta}}[\|p_1\|_2 + \|p_2\|_2]\|p_1 - p_2\|_2,$$

что согласно (29) доказывает справедливость неравенства (28). ■

Перейдем к основному результату настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (1), (4), (5) *и* $\|p\|_2 < \eta$. *Если, кроме того,* $3q - 2\beta > 1$, *то для величин* $\beta_k(p)$ *из* (19), (20) *и любых* p_1, p_2 *таких, что* $\|p_j\|_2 < \eta$ $(j = 1, 2)$, *выполняется неравенство*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k(p_1) - \beta_k(p_2)|^2} \le C_8[\|p_1\|_2 + \|p_2\|_2] \cdot \|p_1 - p_2\|_2, \tag{30}$$

где положительная постоянная

$$C_8 = C_7\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k')^{2(q-\beta)}}}$$

не зависит от p_1 *и* p_2.

Доказательство. Если $3q - 2\beta > 1$, то для $\omega = 2(q - \beta)$ имеем $\omega + q > 1$, поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k')^{2(q-\beta)}}$$

сходится, и из (28) следует (30). ■

Теорема 1 может служить основой для восстановления квадратично суммируемого потенциала p по спектрам различных граничных задач для степени оператора Лапласа на некотором классе ограниченных областей из $\mathbb{R}^n$, в том числе в случае кратного спектра.

Отметим, что теорема 1 анонсирована ранее в [5] (без указания явных выражений для η и $\beta_k(p)$).

Список литературы

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука. – 1965. – 448 с.

2. *Томин Н. Г.* О некоторых формулах первого регуляризованого следа для дискретных операторов // Математические заметки. – 2001. – Т. 70. – Вып. 1. – С. 109–122.

3. *Томин Н. Г.* О восстановлении потенциала в обратной задаче для степени оператора Штурма–Лиувилля // Современная математика и ее приложения. – 2003. – Т. 8. – Ч. 2. – С. 126–135.

4. *Томин Н. Г.* Восстановление несимметричного потенциала по смеси спектров в обратной задаче для степени оператора Лапласа на прямоугольнике // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. — 2010. — Вып. 1(7). — С. 83—96.

5. *Томин Н. Г.* К обратной задаче спектрального анализа для некоторого класса дискретных операторов // Всероссийская конференция “Дифференциальные уравнения и их приложения”: Тезисы докладов. – Самара.: Изд-во “Универс групп”. – 2011. – С. 116–117.

Поступила в редакцию 25.12.2011.