Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 139 – 144.

УДК 517.95

И. В. Томина[1]

Связь между смешанными граничными задачами для оператора Лапласа на прямоугольнике и прямоугольном треугольнике с углом $\pi/6$

Ключевые слова: оператор Лапласа, прямоугольный треугольник, смешанные граничные условия, собственные числа, собственные функции.

Рассматривается связь между собственными функциями (и соответствующими им собственными числами) смешанных граничных задач для оператора Лапласа на прямоугольнике и на прямоугольном треугольнике с острым углом $\pi/6$ (на некоторых сторонах задается граничное условие Дирихле, а на оставшихся — граничное условие Неймана).

Keywords: Laplace operator, right-angled triangle, mixed boundary conditions, eigenvalues, eigenfunctions.

We consider a relation between eigenfunctions (and corresponding eigenvalues) of mixed boundary problems for the Laplace operator on a rectangle and on a right-angled triangle with an angle $\pi/6$ (on every side either the Dirichlet boundary condition or the Neumann boundary condition is given).

Рассмотрим следующую граничную спектральную задачу

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \text{ на } D, \\ i_j u + (1 - i_j)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } l_j \quad (j = 1,\, 2,\, 3), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y\sqrt{3} \le x \le (2\pi - y\sqrt{3})/3\}$$

— прямоугольный треугольник с углом $\pi/6$; l_1', l_2', l_3' — соответственно прямые $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}(2\pi/3 - x)$, $y = 0$; $l_j = D \cap l_j'$ — стороны треугольника D, $\partial D = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ — его граница, ν — внутренняя нормаль к ∂D; $(i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3$.

Решения спектральной задачи (1) ищем в классе $C^{(2)}(D)$ дважды непрерывно дифференцируемых на треугольнике D функций; если для некоторого λ существует ненулевое решение $u(x, y)$ задачи (1) из класса $C^{(2)}(D)$, то $u(x, y)$ есть собственная функция спектральной задачи (1), соответствующая собственному числу λ.

[1]Ивановский государственный энергетический университет;
E-mail: ivtomina@gmail.com.

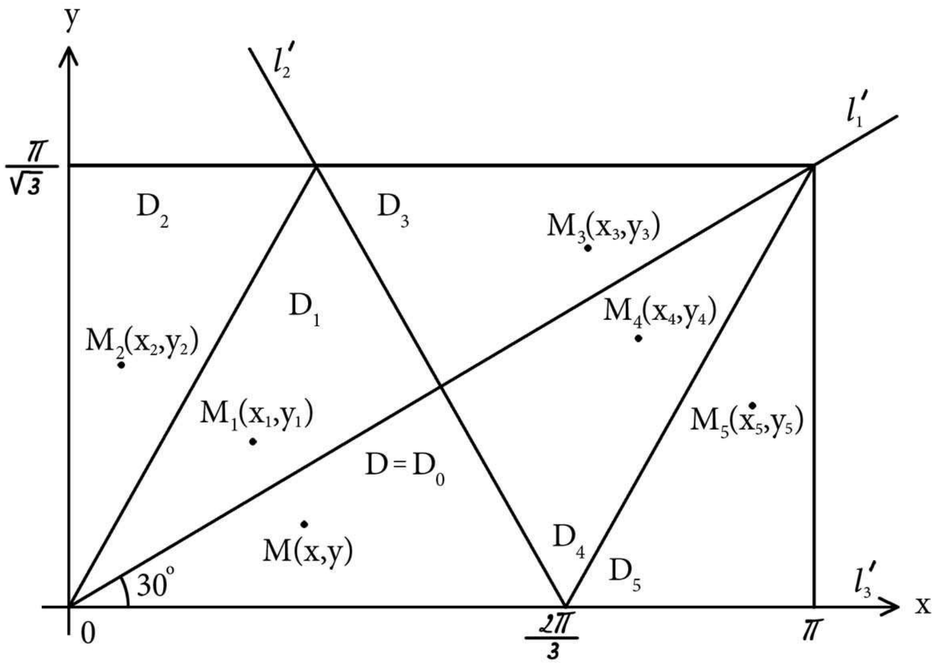

Рис. 1

Через W_k, $k = 1, 2, 3$, обозначается преобразование симметрии (отражение) плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно прямой l'_k. Пусть V_0 — тождественное отображение $\mathbb{R}^2$ на себя, $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1W_3$ (поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ против часовой стрелки на угол $\pi/3$ вокруг точки $O(0,0)$), $V_3 = W_1W_2 = W_2W_1$, $V_4 = W_2$, $V_5 = W_2W_3$; отметим, что при $k = 0,1,2$ $V_{k+3} = V_kW = WV_k$, где W — центральная симметрия плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно точки $B(\pi/2,\ \pi/2\sqrt{3})$.

Для $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ при $k = \overline{0,5}$ полагаем $V_kM = M_k(x_k,y_k)$. Получаем разбиение прямоугольника $\Pi = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi$ и $0 \le y \le \pi/\sqrt{3}\}$ на 6 равных треугольников $D_k = V_kD = \{M_k \mid M \in D\}$, где $k = \overline{0,5}$ (см. рис. 1). Одним из этих треугольников является исходный треугольник $D = D_0$. Любые две точки M_k, лежащие в смежных треугольниках D_k, симметричны относительно общей стороны этих треугольников.

Нетрудно проверить, что для $x_0 = x$, $y_0 = y$ имеем $x_1 = (x + y\sqrt{3})/2$, $y_1 = (x\sqrt{3} - y)/2$, $x_2 = (x - y\sqrt{3})/2$, $y_2 = (x\sqrt{3} + y)/2$; при $k = 0, 1, 2$ получаем $x_{k+3} = \pi - x_k$, $y_{k+3} = \pi/\sqrt{3} - y_k$.

Фиксируем $(i_1,i_2,i_3) \in \{0,1\}^3$. Пусть $u(x,y) \equiv u(M)$ — какое-либо решение спектральной задачи (1), соответствующее некоторому собственному числу λ. Рассмотрим схему

$$\begin{tikzcd} D_2 & & & \\ D_1 \arrow[u] \arrow[d] & D_0 \arrow[l] \arrow[r] & D_4 \arrow[r] & D_5 \\ D_3 & & & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Каждые два треугольника, соединенные в этой схеме горизонтальной или вертикальной стрелкой, имеют общую сторону. Продолжим функцию $u(M)$ с треугольника D_0 на прямоугольник П последовательно по схеме (2) так, чтобы через сторону, на которой задано условие Неймана (Дирихле), функция продолжалась с одного треугольника на другой симметрично (соответственно антисимметрично) относительно этой общей стороны треугольников. Поставим на рис. 2 возле каждой стороны l_j треугольника D (внутри D) число i_j ($i_j = 0$, если на l_j задано условие Неймана и $i_j = 1$, если на l_j задано условие Дирихле). При продолжении через общую сторону двух треугольников граничные условия переносятся на "новый" треугольник, причем с обеих сторон смежной стороны этих треугольников получается одно и то же граничное условие. Расставим возле каждой стороны каждого треугольника D_k ($k = \overline{0,5}$) внутри этого треугольника числа i_1, i_2 и i_3 в зависимости от условий Дирихле или Неймана для продолженной таким образом функции на этой стороне. Кроме того, внутри каждого треугольника D_k пишем число ξ_k (равное $+1$ или -1) такое, что $u(M_k) = \xi_k u(M)$ для всех $M \in D$ (см. рис. 2). Полученная функция $\tilde{u}(M; i_1, i_2, i_3)$ определена на прямоугольнике П и удовлетворяет условиям симметрии

$$\begin{cases} \tilde{u}(M_1; i_1, i_2, i_3) = (-1)^{i_1} u(M), \\ \tilde{u}(M_2; i_1, i_2, i_3) = (-1)^{i_1+i_3} u(M), \\ \tilde{u}(M_3; i_1, i_2, i_3) = (-1)^{i_1+i_2} u(M), \\ \tilde{u}(M_4; i_1, i_2, i_3) = (-1)^{i_2} u(M), \\ \tilde{u}(M_5; i_1, i_2, i_3) = (-1)^{i_2+i_3} u(M). \end{cases} \tag{3}$$

Функция $\tilde{u}(M; i_1, i_2, i_3)$ симметрична (антисимметрична) относительно любой общей стороны двух треугольников из $\{D_k \mid k = \overline{0,5}\}$, на которой она удовлетворяет условию Неймана (Дирихле). Таким образом, функция $\tilde{u}(M; i_1, i_2, i_3)$ не зависит от выбора схемы, по которой последовательно, подобно (2), можно продолжить $u(M)$ с D на П по указанному выше правилу.

Согласно [2] функция $\tilde{u}(x, y; i_1, i_2, i_3)$ принадлежит пространству $C^{(2)}(\Pi)$. Действительно, нужно проверить лишь выполнение условия

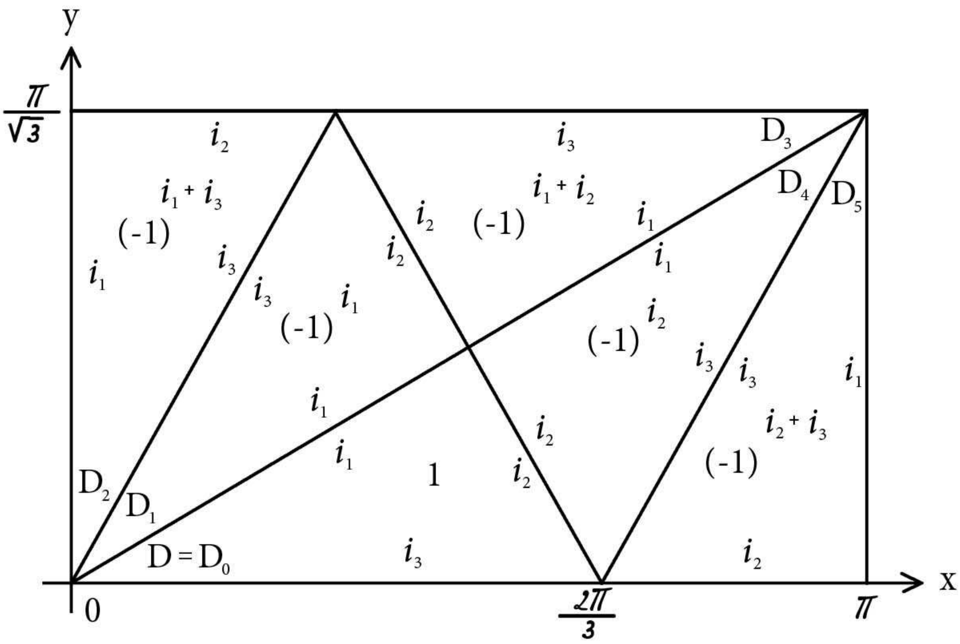

Рис. 2

$\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_{\tilde{l}} = 0$ на общей стороне $\tilde{l}$ двух смежных треугольников, на которой $\tilde{u}(x, y)$ удовлетворяет условию Дирихле (см. рис. 2). Если, например, на стороне l_1 треугольника D задано условие Дирихле, то в силу инвариантности оператора Лапласа относительно движений плоскости и из того, что $u(x, y) \in C^{(2)}(D)$ получаем, что для любой точки $M_0 \in l_1$

$$\Delta u(M_0) = \lim_{D \ni M \to M_0} \Delta u(M) = \lim_{D \ni M \to M_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} \right)(M) = \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(M_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}(M_0).$$

Так как по условию $u|_{l_1} = 0$, то и $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}\right|_{l_1} = 0$, поэтому из (1) следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(M_0) = -\lambda u(M_0) - \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}(M_0) = 0,$$

какова бы ни была точка $M_0 \in l_1$. Согласно [2] функция $\tilde{u}(x, y; i_1, i_2, i_3)$ принадлежит пространству $C^{(2)}(D \cup D_1)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

на равностороннем треугольнике $D \cup D_1$. Аналогично рассматривается любая общая сторона $\tilde{l}$ двух треугольников в случае условия Дирихле на ней. При симметричном продолжении через сторону. на которой задано условие Неймана, проблем с гладкостью продолженной функции на этой стороне не возникает.

Пусть теперь функция $v(x,y)$, принадлежащая $C^{(2)}(\Pi)$, удовлетворяет уравнению $\Delta u + \lambda u = 0$ на Π, граничным условиям на $\partial\Pi$, соответствующим числам, указанным на рис. 2 и удовлетворяет условиям симметрии (3) с заменой $\tilde{u}(M_k; i_1, i_2, i_3)$ на $v(M_k)$ и $u(M)$ на $v(M)$. Тогда согласно [2] функция $v|_D$ есть решение спектральной задачи (1).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $(i_1, i_2, i_3) \in \{0,1\}^3$. *Следующие утверждения равносильны:*

1) $u(x,y)$ *есть собственная функция спектральной задачи* (1), *соответствующая собственному числу* λ*;*

2) *следующая спектральная задача на прямоугольнике*

$$\Pi = [0,\pi] \times \left[0, \pi/\sqrt{3}\right],$$

а именно,

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ на } \Pi, \tag{4}$$

$$\begin{cases} i_3 u(x,0) + (1-i_3)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \text{ при } 0 \le x \le 2\pi/3, \\ i_2 u(x,0) + (1-i_2)\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \text{ при } 2\pi/3 \le x \le \pi, \\ i_2 u(x,\pi/\sqrt{3}) + (1-i_2)\frac{\partial u}{\partial y}(x,\pi/\sqrt{3}) = 0 \text{ при } 0 \le x \le \pi/3, \\ i_3 u(x,\pi/\sqrt{3}) + (1-i_3)\frac{\partial u}{\partial y}(x,\pi/\sqrt{3}) = 0 \text{ при } \pi/3 \le x \le \pi, \\ i_1 u(0,y) + (1-i_1)\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \text{ при } 0 \le y \le \pi/\sqrt{3}, \\ i_1 u(\pi,y) + (1-i_1)\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0 \text{ при } 0 \le y \le \pi/\sqrt{3}, \end{cases} \tag{5}$$

имеет собственную функцию $v(x,y)$, *соответствующую указанному в* 1) *собственному числу* λ, *причем* $v(x,y)$ *удовлетворяет следующим условиям симметрии:*

$$v(x_k, y_k) = (-1)^{s_k} v(x,y) \quad (k = \overline{0,5}, \quad (x,y) \in D), \tag{6}$$

где $s_0 = 0$, $s_1 = i_1$, $s_2 = i_1 + i_3$, $s_3 = i_1 + i_2$, $s_4 = i_2$, $s_5 = i_2 + i_3$ *и* $v(x,y) = u(x,y)$ *всюду на* D.

При $k = 0$ равенство (6) тривиально, и приводится для удобства изложения.

Автору неизвестны собственные числа и собственные функции спектральной задачи (4)–(5) при $i_2 \ne i_3$. Но при $i_2 = i_3$ собственные числа и собственные функции спектральной задачи (4)–(5) находятся методом Фурье разделения переменных и хорошо известны (см., например, [3] в случае $a = \pi$, $b = \pi/\sqrt{3}$).

Отметим, что все результаты настоящей работы получены ранее в [1].

Список литературы

1. *Томина И. В.* Регуляризованные следы степени оператора Лапласа с потенциалом на треугольниках // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.–мат. наук. — Владимир. — ВГПУ. — 1995. — 98 с.

2. *Томина И. В.* О симметричном и антисимметричном продолжениях функций двух переменных // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 2000. – Вып. 3. – С. 103–108.

3. *Томина И. В.* О регуляризованных следах степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольниках в случае смешанных граничных задач // Вестник Иван. гос. энергетического у-та. – 2001. – Вып. 1. – С. 85–89.

Поступила в редакцию 24.12.2011.