Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 15–28.

УДК 517.954

А. С. Волкова[1]

Фредгольмова разрешимость в классе W_2^2 задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа на графе-звезде

Ключевые слова: обобщенная производная, второе основное неравенство, теорема единственности, фредгольмова разрешимость.

Для решений класса $W_2^2(\Gamma)$ получен аналог второго основного неравенства, используемый для доказательства теоремы единственности. Показано, что задача Дирихле является фредгольмово разрешимой в пространстве $W_2^2(\Gamma)$.

Keywords: generalized derivative, second fundamental inequality, uniqueness theorem, Fredholm solvability.

For solutions of the class $W_2^2(\Gamma)$, we obtain analog of the second basic inequality; it is used for proof of the uniqueness theorem. It is shown, that the Dirichlet problem is Fredholm solvable in the space $W_2^2(\Gamma)$.

В предложенной работе происходит замена классических постановок краевых задач обобщенными. Для решений класса $W_2^2(\Gamma)$ получен аналог второго основного неравенства [1], используемый при доказательстве теоремы единственности задачи $Lu = \lambda u + f, u\mid_{\partial\Gamma} = 0$ в пространстве $W_{2,0}^2(a, \xi, \Gamma)$, из которой следует теорема существования ее решения для любой правой части $f(x) \in L_2(\Gamma)$ – первая теорема Фредгольма. Далее устанавливается, что теорема единственности для данной задачи в пространстве $W_{2,0}^2(a, \xi, \Gamma)$ нарушается только для некоторого не более чем счетного множества значений $\lambda = \lambda_n$, для которых исследуется вопрос их кратности — вторая теорема Фредгольма. Наконец, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи $Lu = \lambda u + f, u\mid_{\partial\Gamma} = 0$ для собственных значений λ_n — третья теорема Фредгольма.

1. Обобщенные решения для эллиптического уравнения на графе-звезде

1.1. Предварительные сведения. Пусть Γ – граф-звезда, состоящий из m одинаковых ребер γ_k и одного внутреннего узла ξ. При этом ребра γ_k $(k = \overline{1, m-1})$ параметризованы отрезком $[0, \pi/2]$ (ориентация на ребрах “к узлу ξ”), ребро γ_m – отрезком $[\pi/2, \pi]$ (ориентация на ребре – “от узла ξ”). И пусть $\Re(\Gamma)$ – объединение ребер графа – замкнутых отрезков. Через V обозначим множество всех узлов графа: $V = \partial\Gamma \cup \{\xi\}$ ($\partial\Gamma$ – множество граничных узлов).

Обозначим через $C(\Gamma)$ множество непрерывных на Γ функций, $C[\Gamma]$ – множество кусочно непрерывных функций (непрерывность на ребрах, пределы в узле ξ по разным ребрам могут быть различными), $C^1[\Gamma]$ – множе-

[1]Воронежский государственный университет; E-mail: volan100@mail.ru.

ство функций, производные первого порядка которых принадлежат $C\,[\Gamma]$. Через $C_0^1\,(\Gamma_0)$ обозначим множество функций $\varphi\,(x) \in C^1\,[\Gamma]$, компактный носитель которых лежит в $\Gamma_0 = \Gamma \backslash V$ (финитные в Γ_0 функции с гладкостью первого порядка); $L_2\,(\Gamma)$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом на графе Γ. Пространства $C_0^\infty\,(\Gamma_0)$ и $C\,[\Gamma]$ плотны в $L_2\,(\Gamma)$.

Сужение функции $f\,(x)$ на ребро γ будем обозначать через $f\,(x)_\gamma$. Интеграл от функции $f\,(x)$ по графу Γ понимается как сумма интегралов от сужений $f\,(x)_\gamma$ по каждому ребру: $\int\limits_\Gamma f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} f(x)_{\gamma_k} dx$.

Введем понятие обобщеннной производной для функций класса $L_2\,(\Gamma)$.

Определение 1. *Обобщенной производной* функции $u(x) \in L_2(\Gamma)$ называется функция $u^*(x) \in L_2(\Gamma)$ такая, что имеет место равенство

$$\int\limits_\Gamma u(x)\frac{d\eta(x)}{dx}dx = -\int\limits_\Gamma u^*(x)\eta(x)dx,$$

при любой функции $\eta(x) \in C_0^\infty(\Gamma_0)$. Обобщенную производную $u^*(x)$ функции $u(x)$ будем обозначать символом $\dfrac{du(x)}{dx}$.

Пространство функций $u(x) \in L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка обозначим через $W_2^1(\Gamma)$. Элементами этого пространства являются функции из $L_2(\Gamma)$, эквивалентные непрерывным на $\Re(\Gamma)$ и абсолютно непрерывным функциям, имеющим почти всюду производную $\dfrac{du}{dx}$ как элемент пространства $L_2(\Gamma)$. Пространство функций $u(x) \in L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную второго порядка, обозначим через $W_2^2(\Gamma)$. Элементами этого пространства являются функции из $L_2(\Gamma)$, эквивалентные непрерывно дифференцируемым на $\Re(\Gamma)$[1] и имеющим вторую производную $\dfrac{d^2u(x)}{dx^2}$ как элемент пространства $L_2(\Gamma)$. Таким образом, здесь и в дальнейшем, говоря о функции $u(x) \in W_2^2(\Gamma)$, мы будем иметь в виду функцию $u(x)$ с указанными выше свойствами. Нормы в пространствах $W_2^1(\Gamma)$ и $W_2^2(\Gamma)$ соответственно определяются скалярными произведениеми:

$$\langle u,v\rangle_1 = \int\limits_\Gamma \left(uv + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right)dx, \quad \langle u,v\rangle_2 = \int\limits_\Gamma \left(uv + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx;$$

будем обозначать их так: $\|u\|_{W_2^1(\Gamma)} = \langle u,u\rangle_1^{1/2}$, $\|u\|_{W_2^2(\Gamma)} = \langle u,u\rangle_2^{1/2}$.

Рассмотрим дифференциальное выражение $(Lu)(x)$, имеющее представление

$$(Lu)(x) = -\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + b(x)u(x), \tag{1}$$

где $u(x) \in W_2^2(\Gamma)$, $a(x), b(x)$ – функции, имеющие обобщенные производные первого порядка при x, изменяющихся внутри каждого ребра $\gamma_k \subset \Gamma$.

[1] $\dfrac{du(x)}{dx}$ – абсолютно непрерывные на $\Re(\Gamma)$

Обозначим через $L(u,\eta)$, $u(x),\eta(x)\in W_2^2(\Gamma)$, билинейную форму

$$L(u,\eta)=\int\limits_{\Gamma}\left[a(x)\frac{du(x)}{dx}\cdot\frac{d\eta(x)}{dx}+b(x)u(x)\eta(x)\right]dx. \tag{2}$$

В силу представления элементов пространства $W_2^2(\Gamma)$ последнее содержит функции $u(x)$, непрерывные в узле ξ, т. е.

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_k}=u\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m}, \tag{3}$$

и удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{k=1}^{m-1}a\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_k}\frac{du(\frac{\pi}{2})_{\gamma_k}}{dx}=a\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m}\frac{du(\frac{\pi}{2})_{\gamma_m}}{dx}. \tag{4}$$

Например, при $m=3$ функция,

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-\alpha}(\frac{x}{\pi})^{2-\alpha}, & x\in\gamma_1,\\ -2(\frac{x}{\pi})^{3-\alpha}+\frac{3-\alpha}{2-\alpha}(\frac{x}{\pi})^{2-\alpha}, & x\in\gamma_2,\\ \frac{1}{2-\alpha}(1-\frac{x}{\pi})^{2-\alpha}, & x\in\gamma_3\end{cases}$$

для любого фиксированного α из интервала $(0,\,1/2)$ принадлежит классу $L_2(\Gamma)$. Она является непрерывно дифференцируемой на $\Re(\Gamma)$, и для нее существует абсолютно непрерывная производная $df_\alpha(x)/dx$ на $\Re(\Gamma)$ и вторая производная $d^2f_\alpha(x)/dx^2$ как элемент пространства $L_2(\Gamma)$. Значит, $f_\alpha(x)\in W_2^2(\Gamma)$. Функция $f_\alpha(x)$ непрерывна в узле ξ (выполнены соотношения (3)), удовлетворяет условию (4) ($a(\frac{\pi}{2})_{\gamma_k}=1,\ k=1,\,2,\,3$) и условию $f_\alpha(x)\mid_{x\in\partial\Gamma}=0$.

Так же можно показать, что в пространстве $W_2^1(\Gamma)$ есть функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям аналогичным приведенным. Например, при при $m=3$ функция

$$g_\alpha(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}(\frac{x}{\pi})^{1-\alpha}, & x\in\gamma_1,\\ -6(\frac{x}{\pi})^{2-\alpha}+\frac{4-3\alpha}{1-\alpha}(\frac{x}{\pi})^{1-\alpha}, & x\in\gamma_2,\\ \frac{1}{1-\alpha}(1-\frac{x}{\pi})^{1-\alpha}, & x\in\gamma_3\end{cases}$$

для любого фиксированного α из интервала $(0,\,1/2)$ принадлежит классу $L_2(\Gamma)$, для нее существует обобщенная производная $\dfrac{dg_\alpha(x)}{dx}\in L_2(\Gamma)$, значит $g_\alpha(x)\in W_2^1(\Gamma)$. Функция $g_\alpha(x)$ непрерывна в узле ξ (выполнены соотношения (3)), удовлетворяет условию (4) ($a(\frac{\pi}{2})_{\gamma_k}=1,\ k=1,\,2,\,3$) и условию $g_\alpha(x)\mid_{x\in\partial\Gamma}=0$.

Обозначим через $\Omega(a,\Gamma,\xi)$ множество функций $u(x)\in C(\Gamma)$ из класса $W_2^2(\Gamma)$, удовлетворяющих соотношению (4) в узле ξ. $\Omega_0(a,\Gamma,\xi)$ – множество функций $u(x)\in\Omega(a,\Gamma,\xi)$, равных нулю в граничных узлах графа Γ. Замыкание $\Omega(a,\Gamma,\xi)$ по норме $W_2^2(\Gamma)$ обозначим через $W_2^2(a,\Gamma,\xi)$, замыкание $\Omega_0(a,\Gamma,\xi)$ суть $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$. Через $\widetilde{\Omega}(a,\Gamma,\xi)$ обозначим множество функций $u(x)\in C(\Gamma)$ из класса $W_2^1(\Gamma)$, удовлетворяющих соотношению (4) в узле ξ, $\widetilde{\Omega}_0(a,\Gamma,\xi)$ – множество функций $u(x)\in\widetilde{\Omega}(a,\Gamma,\xi)$, равных нулю в граничных узлах графа Γ. Замыкание $\widetilde{\Omega}_0(a,\Gamma,\xi)$ по норме $W_2^1(\Gamma)$ обозначим через $W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$. Ясно, что $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)\subset W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$.

1.2. Решения из класса $W_2^2(\Gamma)$. В данной работе для функций $u(x) \in W_2^2(a, \Gamma, \xi)$ исследуется разрешимость задачи Дирихле

$$(Lu)(x) = \lambda u(x) + f(x), \tag{5}$$

$$u(x)\mid_{\partial\Gamma} = 0, \tag{6}$$

в зависимости от параметра λ.

Пусть коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ в представлении (1) являются еще и ограниченными функциями на Γ:

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad b_* \leq b(x) \leq b^*, \quad x \in \Gamma \tag{7}$$

(a_*, a^*, b_*, b^* – фиксированные постоянные); функция $f(x)$ принадлежит классу $L_2(\Gamma)$.

Определение 2. *Решением класса* $W_2^2(\Gamma)$ *уравнения* (5) называется функция $u(x) \in W_2^2(a, \Gamma, \xi)$, удовлетворяющая уравнению (5).

Лемма 1. *Принадлежность решения* $u(x)$ *задачи* (5), (6) *к пространству* $W_{2,0}^2(a, \Gamma, \xi)$ *эквивалентна тождеству*

$$L(u, \eta) = \int\limits_{\Gamma} [\lambda u + f]\, \eta dx \tag{8}$$

для $\forall\ \eta(x) \in C_0^\infty(\Gamma_0)$.

<u>Доказательство</u>. Если $u(x) \in W_{2,0}^2(a, \xi, \Gamma)$ и удовлетворяет (5), (6), то для нее и любой $\eta(x) \in C_0^\infty(\Gamma_0)$ справедливо соотношение (8).

Верно и обратное: если для $u(x) \in W_{2,0}^2(a, \xi, \Gamma)$ тождество (8) выполняется при $\eta \in C_0^\infty(\Gamma_0)$, то $u(x)$ есть решение задачи (5), (6). Действительно, из (8) следует, что при $\forall \eta \in C_0^\infty(\Gamma_0)$

$$\int\limits_{\Gamma} [(Lu)(x) - \lambda u(x) - f(x)]\, \eta(x) dx = 0;$$

так как $(Lu)(x) - \lambda u(x) - f(x) \in L_2(\Gamma)$, то $Lu = \lambda u(x) + f$ в силу плотности $C_0^\infty(\Gamma_0)$ в $L_2(\Gamma)$.

Таким образом, задача (5),(6) и тождество (8) при любой функции $\eta \in C_0^\infty(\Gamma_0)$ эквивалентны на функциях $u(x) \in W_{2,0}^2(a, \xi, \Gamma)$. ■

Определение 3. *Решением класса* $W_2^2(\Gamma)$ *краевой задачи* (5), (6) называется функция $u(x) \in W_{2,0}^2(a, \Gamma, \xi)$, являющаяся решением уравнения (5).

2. Фредгольмова разрешимость в пространстве $W_2^2(\Gamma)$

2.1. Первое основное неравенство. Для решений $u(x)$ из пространства $W_{2,0}^2(a, \Gamma, \xi)$ получим аналог основного (энергетического [1, 2, 3]) неравенства. Используя условие (7), получим следующую оценку

$$\int\limits_{\Gamma}(Lu)(x)u(x)dx=\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right)+b(x)u(x)\right)u(x)dx=$$
$$=\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right)u(x)dx+\int\limits_{\Gamma}b(x)u^2(x)dx=$$
$$=\int\limits_{\Gamma}a(x)\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2dx+\int\limits_{\Gamma}b(x)u^2(x)dx\geq$$
$$\geq a_*\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2dx+b_*\int\limits_{\Gamma}u^2(x)dx=a_*\left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+b_*\left\|u\right\|^2_{L_2(\Gamma)},$$

то есть

$$\int\limits_{\Gamma}(Lu)(x)u(x)dx\geq a_*\left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+b_*\left\|u\right\|^2_{L_2(\Gamma)}. \tag{9}$$

Для $f(x)\in L_2(\Gamma)$ имеет место цепочка неравенств[2],

$$\int\limits_{\Gamma}fudx=(f,u)\leq\|f\|_{L_2(\Gamma)}\cdot\|u\|_{L_2(\Gamma)}\leq\epsilon\left\|u\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+\frac{1}{4\epsilon}\left\|f\right\|^2_{L_2(\Gamma)},\ \forall\ \epsilon>0,$$

откуда и из (9) получаем основное (энергетическое) неравенство

$$a_*\left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+b_*\left\|u\right\|^2_{L_2(\Gamma)}\leq(\epsilon+\lambda)\left\|u\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+\frac{1}{4\epsilon}\left\|f\right\|^2_{L_2(\Gamma)},\ \forall\ \epsilon>0, \tag{10}$$

учитывая, что $u(x)$ – решение задачи (5), (6). Далее

$$a_*\left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+(b_*-\epsilon-\lambda)\left\|u\right\|^2_{L_2(\Gamma)}\leq\frac{1}{4\epsilon}\left\|f\right\|^2_{L_2(\Gamma)},$$

$$\left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+\left\|u\right\|^2_{L_2(\Gamma)}\leq\frac{1}{4\epsilon A}\left\|f\right\|^2_{L_2(\Gamma)}; \tag{11}$$

здесь $A=\min\{a_*,\,b_*-\epsilon-\lambda\}$. Неравенство (11) выполняется при условии

$$A>0. \tag{12}$$

2.2. Второе основное неравенство. Для решений $u(x)$ задачи (5), (6) получим аналог второго основного неравенства [1]. Для этого, помимо условий (7) на коэффициентах $a(x),\ b(x)$, будем считать, что коэффициент $a(x)$ имеет ограниченную обобщенную производную первого порядка, т. е.

$$\mu_*\leq\frac{da(x)}{dx}\leq\mu^*. \tag{13}$$

[2] символом $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Рассмотрим $\int\limits_{\Gamma}\left(\left(Lu\right)(x)\right)^2 dx$ и оценим его снизу следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Gamma}((Lu)(x)))^2dx=\int\limits_{\Gamma}\left(a(x)\tfrac{d^2u(x)}{dx^2}\right)^2dx-\\
&-\int\limits_{\Gamma}2a(x)\tfrac{d^2u(x)}{dx^2}\left(b(x)u(x)-\tfrac{d}{dx}a(x)\tfrac{du(x)}{dx}\right)dx+\\
&+\int\limits_{\Gamma}\left(b(x)u(x)-\tfrac{d}{dx}a(x)\tfrac{du(x)}{dx}\right)^2dx\geq\\
&\geq(1-\epsilon_1)\int\limits_{\Gamma}\left(a(x)\tfrac{d^2u(x)}{dx^2}\right)^2dx+\\
&+(1-\tfrac{1}{\epsilon_1})\int\limits_{\Gamma}\left(b(x)u(x)-\tfrac{d}{dx}a(x)\tfrac{du(x)}{dx}\right)^2dx\geq\\
&\geq a_*^2(1-\epsilon_1)\int\limits_{\Gamma}\left(\tfrac{d^2u(x)}{dx^2}\right)^2dx-c(\tfrac{1}{\epsilon_1}-1)\int\limits_{\Gamma}\left((u(x))^2dx+\left(\tfrac{du(x)}{dx}\right)^2\right)dx,
\end{aligned}$$

где $c=\max\left\{b_*^2,\mu_*^2\right\}$, а a_*, b_*, μ_* определены из условий (7), (13); ϵ_1 – произвольные числа из интервала (0, 1). Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma}((Lu)(x))^2dx\geq a_*^2(1-\epsilon_1)\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)^2dx-$$
$$-c\left(\frac{1}{\epsilon_1}-1\right)\int\limits_{\Gamma}\left(\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2+u^2(x)\right)dx,\quad(14)$$

т. е.

$$\|L(u)\|_{L_2(\Gamma)}^2\geq a_*^2(1-\epsilon_1)\left\|\frac{d^2u}{dx^2}\right\|_{L_2(\Gamma)}^2-c\left(\frac{1}{\epsilon_1}-1\right)\left(\|u\|_{L_2(\Gamma)}^2+\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L_2(\Gamma)}\right)$$

или

$$a_*^2(1-\epsilon_1)\left\|\frac{d^2u}{dx^2}\right\|_{L_2(\Gamma)}^2\leq\|L(u)\|_{L_2(\Gamma)}^2+c\left(\frac{1}{\epsilon_1}-1\right)\left(\|u\|_{L_2(\Gamma)}^2+\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L_2(\Gamma)}^2\right).$$

Прибавив к обеим частям неравенства $a_*^2(1-\epsilon_1)\left(\|u\|_{L_2(\Gamma)}^2+\|\frac{du}{dx}\|_{L_2(\Gamma)}^2\right)$, получим второе основное неравенство:

$$a_*^2\left(1-\epsilon_1\right)\|u\|_{W_2^2(\Gamma)}^2\leq$$
$$\leq\|L(u)\|_{L_2(\Gamma)}^2+\left(c\left(\frac{1}{\epsilon_1}-1\right)+a_*^2(1-\epsilon_1)\right)\left(\|u\|_{L_2(\Gamma)}^2+\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L_2(\Gamma)}^2\right).$$

Используя (11) при условии (12), получаем неравенство

$$a_*^2\left(1-\epsilon\right)\|u\|_{W_2^2(\Gamma)}^2\leq\|f\|_{L_2(\Gamma)}^2+\frac{1}{4A\epsilon}B\,\|f\|_{L_2(\Gamma)}^2,$$

где $B = \min\left\{|\lambda|\,,\, c\left(\frac{1}{\epsilon_1}-1\right)+a_*^2(1-\epsilon_1)\right\}$; из него следует

$$\|u\|^2_{W_2^2(\Gamma)} \le \widetilde{C}\,\|f\|^2_{L_2(\Gamma)}\,, \quad \text{где} \quad \widetilde{C} = \frac{1+\frac{1}{4A\epsilon}B}{a_*^2\,(1-\epsilon)}. \tag{15}$$

Из полученной оценки вытекает единственность решения задачи (5), (6). Действительно, предположим существование двух решений $u_1(x)$, $u_2(x)$ из $W^2_{2,0}(a,\Gamma,\xi)$; тогда

$$\|u_1\|^2_{W_2^2(\Gamma)} \le \widetilde{C}\,\|f\|^2_{L_2(\Gamma)}\,, \quad \|u_2\|^2_{W_2^2(\Gamma)} \le \widetilde{C}\,\|f\|^2_{L_2(\Gamma)}\,.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|u_1-u_2\|^2_{W_2^2(\Gamma)} = 0,$$

и следовательно, $u_1(x) = u_2(x)$ п.в. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *При выполнении условий* (7), (12) *и* (13) *задача* (5), (6) *может иметь не более одного обобщенного решения из* $W^2_{2,0}(a,\Gamma,\xi)$.

2.3. Фредгольмова разрешимость краевой задачи (5),(6). Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Для любой функции* $u(x)\in W^1_{2,0}(a,\Gamma,\xi)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_2(\Gamma)} \le C_\Gamma^2 \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L_2(\Gamma)}, \tag{16}$$

где C_Γ^2 *– некоторая постоянная* (неравенство (16) – аналог неравенства Пуанкаре – Фридрихса [1] на Γ).

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $u(x)\in W^1_{2,0}(a,\Gamma,\xi)$ и представим ее в виде

$$u(x) = \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{du(\tau)_{\gamma_k}}{d\tau}d\tau, & x\in\gamma_k\ (k=\overline{1,m-1}),\\ -\int\limits_x^\pi \frac{du(\tau)_{\gamma_m}}{d\tau}d\tau, & x\in\gamma_m. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\int\limits_\Gamma u^2(x)dx = \sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^x \frac{du(\tau)_{\gamma_k}}{d\tau}d\tau\right)^2 dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(\int\limits_x^\pi \frac{du(\tau)_{\gamma_m}}{d\tau}d\tau\right)^2 dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^{\pi/2}\left[x\int\limits_0^x\left(\frac{du(\tau)_{\gamma_k}}{d\tau}\right)^2 d\tau\right]dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left[(\pi-x)\int\limits_x^\pi\left(\frac{du(\tau)_{\gamma_m}}{d\tau}\right)^2 d\tau\right]dx \le$$

$$\le C_\Gamma^2\left[\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{\gamma_k}\left(\frac{du(\tau)_{\gamma_k}}{d\tau}\right)^2 d\tau + \int\limits_{\gamma_m}\left(\frac{du(\tau)_{\gamma_m}}{d\tau}\right)^2 d\tau\right] = C_\Gamma^2\int\limits_\Gamma\left(\frac{du(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau,$$

то есть
$$\int\limits_{\Gamma} u^2(x)dx \le C_\Gamma^2 \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx;$$
постоянная C_Γ^2 легко определяется: $C_\Gamma^2 = \pi^2/8$. Лемма доказана. ■

Пусть далее ℓ отрезок длиною $|\ell|$ и $v(x) \in W_2^1(\ell)$. Имеет место соотношение
$$\int\limits_{\ell} v^2(x)dx \le \frac{1}{|\ell|}\left(\int\limits_{\ell} v(x)dx\right)^2 + \frac{1}{2}|\ell|^2 \int\limits_{\ell} \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2 dx, \tag{17}$$
называемое неравенством Пуанкаре [1, 2, 3] для отрезка ℓ.

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное число $N = N(\varepsilon)$ и M попарно ортогональных в $L_2(\Gamma)$ функций $\varphi_n(x)$ $(n = \overline{1,M},\ M = mN)$, таких, что $\|\varphi_n\|_{L_2(\Gamma)} = 1$ и для любой функции $u(x) \in W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$ справедливо неравенство*
$$\int\limits_{\Gamma} u^2(x)dx \le \sum_{n=1}^{M}\left(\int\limits_{\Gamma} u(x)\varphi_n(x)dx\right)^2 + \varepsilon\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx. \tag{18}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и разобьем каждое ребро $\gamma_k\,(k = \overline{1,m})$ графа Γ отрезками $\Delta_{k\,i}\,(i = \overline{1,N})$ одинаковой длины δ так, чтобы $\frac{1}{2}\delta^2 < \varepsilon$; ясно, что $N = N(\varepsilon)$. Рассмотрим $M = mN$ функций
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}}, & x \in \Delta_{k\,i} \subset \gamma_k, \\ 0, & x \overline{\in} \Delta_{k\,i} \end{cases} \quad (n = (k-1)N + i),$$
где $k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$, т. е. $n = \overline{1,M}$. Отметим, что по построению $\|\varphi_n\|_{L_2(\Gamma)} = 1$ при всех $n = \overline{1,M}$. Ясно также, что функции $\varphi_n(x)$ попарно ортогональны. Учитывая неравенство (17) для функции $u(x)\varphi_n(x)$ на отрезке $\Delta_{k\,i}$, получаем
$$\int\limits_{\Delta_{k\,i}} u^2(x)_{\gamma_k}\varphi_n^2(x)_{\gamma_k}dx \le$$
$$\le \frac{1}{\delta}\left[\int\limits_{\Delta_{k\,i}} u(x)_{\gamma_k}\varphi_n(x)_{\gamma_k}dx\right]^2 + \frac{1}{2}\delta^2\int\limits_{\Delta_{k\,i}}\left[\frac{du(x)}{dx}_{\gamma_k}\varphi_n(x)_{\gamma_k}\right]_{\gamma_k}^2 dx$$
при $n = (k-1)N + i$ $(k = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N})$. Откуда, учитывая представление функции $\varphi_n(x)$, получаем
$$\int\limits_{\Delta_{k\,i}} u^2(x)_{\gamma_k}dx \le \left[\int\limits_{\Delta_{k\,i}} u(x)_{\gamma_k}\varphi_n(x)_{\gamma_k}dx\right]^2 + \varepsilon\int\limits_{\Delta_{k\,i}}\frac{du(x)}{dx}^2_{\gamma_k}dx.$$

Просуммируем полученные неравенства по $i = \overline{1,N}$ и далее по $k = \overline{1,m}$ (при этом n изменяется от 1 до M), учитывая представление функции $\varphi_n(x)$, получим неравенство (18). Лемма доказана. ■

В пространстве $W_2^2(\Gamma)$ введем новое скалярное произведение и норму:

$$[u,v] = \int\limits_\Gamma a(x)\frac{d}{dx}u(x)\frac{d}{dx}v(x)dx, \quad \|u\|_a = \sqrt{[u,u]}. \tag{19}$$

Лемма 4. *Норма* $\|u\|_a$ *эквивалентна норме* $\left\|\frac{d}{dx}u\right\|_{L_2(\Gamma)}$ *и норме* $\|u\|_{W_2^1(\Gamma)}$.

<u>Доказательство</u>. В силу предположения (7) получаем, что

$$a_*\int\limits_\Gamma \frac{d}{dx}u(x)\frac{d}{dx}v(x)dx \le \int\limits_\Gamma a(x)\frac{d}{dx}u(x)\frac{d}{dx}v(x)dx \le a^*(x)\int\limits_\Gamma \frac{d}{dx}u(x)\frac{d}{dx}v(x)dx,$$

то есть

$$a_*(x)\left\|\frac{d}{dx}u(x)\right\|^2_{L_2(\Gamma)} \le \|u\|_a^2 \le a^*(x)\left\|\frac{d}{dx}u(x)\right\|^2_{L_2(\Gamma)}$$

и, значит, норма $\|u\|_a$ эквивалентна норме $\left\|\frac{d}{dx}u\right\|_{L_2(\Gamma)}$. Далее из (16) вытекает

$$\|u\|_{W_2^1(\Gamma)} = \int\limits_\Gamma \left[u^2(x) + \left(\frac{d}{dx}u(x)\right)^2\right]dx \le (1+C_\Gamma^2)\int\limits_\Gamma \left(\frac{d}{dx}u(x)\right)^2 dx,$$

откуда следует

$$\frac{1}{(1+C_\Gamma^2)}\|u\|^2_{W_2^1(\Gamma)} \le \left\|\frac{d}{dx}u\right\|^2_{L_2(\Gamma)} \le \|u\|_{W_2^1(\Gamma)}.$$

Значит, нормы $\left\|\frac{d}{dx}u\right\|_{L_2(\Gamma)}, \|u\|_{W_2^1(\Gamma)}$ эквивалентны норме $\|u\|_a^2$. Лемма доказана. ■

Полученные утверждения используются для доказательства аналога теоремы Реллиха [1, 3] для функций $u(x) \in W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$.

Теорема 2. *Любое множество функций* $u(x) \in W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$*, ограниченное по норме в* $W_2^1(\Gamma)$*, компактно в пространстве* $L_2(\Gamma)$.

<u>Доказательство</u>. Известно несколько способов доказательства утверждения теоремы; будем следовать рассуждениям, аналогичным [3]. Рассмотрим последовательность функций $\{u_i(x)\}_{i\ge1} \subset W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$, удовлетворяющих неравенству $\|u_i\|_{W_2^1(\Gamma)} \le C$ ($C = \text{const}$). Из этого неравенства следует, что $\|u_{i_1} - u_{i_2}\|_{W_2^1(\Gamma)} \le 2C$ для любых номеров i_1, i_2, а, значит,

$$\int\limits_\Gamma \left(\frac{du_{i_1}(x)}{dx} - \frac{du_{i_2}(x)}{dx}\right)^2 dx \le 4C^2.$$

Покажем, что из последовательности $\{u_i(x)\}_{i\ge1}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(\Gamma)$.

Положим $\varepsilon_p = 1/2^{-p}$, $p = 1, 2, \ldots$ и для каждого ε_p, согласно лемме 3, найдем номер N_p и функции $\varphi_n^{(p)}(x)$ $(n = \overline{1, M_p},\ M_p = mN_p)$, для которых выполнено неравенство (18). Из доказательства леммы 3 следует, что $M_1 < M_2 < \cdots < M_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Для каждого фиксированного p и n получим числовую последовательность $\{C_i(p,n)\}_{i\ge1}$, $C_i(p,n) = \int\limits_\Gamma u_i(x)\varphi_n^{(p)}(x)dx$, ограниченную по модулю числом C:

$$\left[\int\limits_\Gamma u_i(x)\varphi_n^{(p)}(x)dx\right]^2 \le \int\limits_\Gamma u_i^2(x)dx \cdot \int\limits_\Gamma \left[\varphi_n^{(p)}(x)\right]^2 dx \le C^2.$$

Последнее означает, что из последовательностей $\{C_i(p,n)\}_{i\ge1}$ $(n = \overline{1, M_1})$ можно выделить подпоследовательности

$$\begin{array}{l}
C_1^{(1)}(p,1),\quad C_2^{(1)}(p,1),\quad C_3^{(1)}(p,1),\ \ldots,\\
C_1^{(1)}(p,2),\quad C_2^{(1)}(p,2),\quad C_3^{(1)}(p,2),\ \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1^{(1)}(p,M_1),\ C_2^{(1)}(p,M_1),\ C_3^{(1)}(p,M_1),\ \ldots,
\end{array}$$

которые сходятся при $p = 1$. Из полученных последовательностей, учитывая $M_1 < M_2$, также можно выделить подпоследовательности

$$\begin{array}{l}
C_1^{(2)}(p,1),\quad C_2^{(2)}(p,1),\quad C_3^{(2)}(p,1),\ \ldots,\\
C_1^{(2)}(p,2),\quad C_2^{(2)}(p,2),\quad C_3^{(2)}(p,2),\ \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1^{(2)}(p,M_1), C_2^{(2)}(p,M_1), C_3^{(2)}(p,M_1),\ \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1^{(2)}(p,M_2), C_2^{(2)}(p,M_2), C_3^{(2)}(p,M_2),\ \ldots,
\end{array}$$

сходящиеся при $p = 1$ и $p = 2$. Продолжая эти построения дальше, получим, учитывая $M_1 < M_2 < \cdots < M_l$, последовательности

$$\begin{array}{l}
C_1^{(l)}(p,1),\quad C_2^{(l)}(p,1),\quad C_3^{(l)}(p,1),\ \ldots,\\
C_1^{(l)}(p,2),\quad C_2^{(l)}(p,2),\quad C_3^{(l)}(p,2),\ \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1^{(l)}(p,M_1),\ C_2^{(l)}(p,M_1),\ C_3^{(l)}(p,M_1),\ \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1^{(l)}(p,M_2),\ C_2^{(l)}(p,M_2),\ C_3^{(l)}(p,M_2),\ \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1^{(l)}(p,M_l),\ C_2^{(l)}(p,M_l),\ C_3^{(l)}(p,M_l),\ \ldots,
\end{array}$$

сходящиеся при $p = 1$, $p = 2$, …, $p = l$ $(l = 1, 2, 3, \ldots)$.

Образуем новые последовательности по «диагональному» правилу:

$$
\begin{array}{l}
C_1^{(1)}(p,1),\quad C_2^{(2)}(p,1),\quad C_3^{(3)}(p,1),\ \dots,\\
C_1^{(1)}(p,2),\quad C_2^{(2)}(p,2),\quad C_3^{(3)}(p,2),\ \dots,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
C_1^{(1)}(p,M_1),\ C_2^{(2)}(p,M_1),\ C_3^{(3)}(p,M_1),\ \dots,\\
C_1^{(2)}(p,1),\quad C_2^{(2)}(p,1),\quad C_3^{(3)}(p,1),\ \dots,\\
C_1^{(2)}(p,2),\ C_2^{(2)}(p,2),\ C_3^{(3)}(p,2),\ \dots,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
C_1^{(2)}(p,M_1),\ C_2^{(2)}(p,M_1),\ C_3^{(3)}(p,M_1),\ \dots,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
C_1^{(2)}(p,M_2),\ C_2^{(2)}(p,M_2),\ C_3^{(3)}(p,M_2),\ \dots,\\
C_1^{(3)}(p,1),\quad C_2^{(3)}(p,1),\quad C_3^{(3)}(p,1),\ \dots,\\
C_1^{(3)}(p,2),\quad C_2^{(3)}(p,2),\quad C_3^{(3)}(p,2),\ \dots,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
C_1^{(3)}(p,M_3),\ C_2^{(3)}(p,M_3),\ C_3^{(3)}(p,M_3),\ \dots,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Ясно, что полученные последовательности сходятся при любых $p = l$ ($l = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$). Последнее означает, что из последовательности $\{u_i(x)\}_{i\geq 1}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{i_j}(x)\}_{j\geq 1}$, для которой при всех $p = 1,\ 2,\ \dots$ и $n = \overline{1, M_p}$ сходятся числовые последовательности $\{C_{i_j}(p,n)\}_{j\geq 1}$, где $C_{i_j}(p,n) = \int\limits_\Gamma u_{i_j}(x)\varphi_n^{(p)}(x)dx$.

Покажем, что подпоследовательность $\{u_{i_\nu}(x)\}_{\nu\geq 1}$ сходится в $L_2(\Gamma)$. Учитывая соотношение (18), получим, что при любом $p = 1,\ 2,\ \dots$ имеет место неравенство

$$
\int\limits_\Gamma \left[u_{i_{\nu_1}}(x) - u_{i_{\nu_2}}(x)\right]^2 dx \leq
$$
$$
\leq \sum_{n=1}^{M_p}\left\{\int\limits_\Gamma \left[u_{i_{\nu_1}}(x) - u_{i_{\nu_2}}(x)\right]\varphi_n^{(p)}(x)dx\right\}^2 + 4C^2\varepsilon_p \quad (\nu_1,\ \nu_2 = 1,\ 2,\ \dots).
$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и определяем такое p, чтобы $4C^2\varepsilon_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Пользуясь сходимостью всех числовых последовательностей $\{C_{i_\nu}(p,n)\}_{\nu\geq 1}$, определим номер M_ε такой, что при $\nu_1,\ \nu_2 > M_\varepsilon$ сумма в правой части последнего неравенства будет меньше $\varepsilon/2$. Тогда для таких $\nu_1,\ \nu_2$ получим

$$
\int\limits_\Gamma [u_{i_{\nu_1}}(x) - u_{i_{\nu_2}}(x)]^2 dx < \varepsilon,
$$

т. е. подпоследовательность $\{u_{i_\nu}(x)\}_{\nu\geq 1}$ сходится в себе по норме $L_2(\Gamma)$, и, следовательно, она имеет предел в $L_2(\Gamma)$. ■

Покажем, что задача (5), (6) с $\lambda = 0$ является фредгольмово разрешимой в пространстве $W_2^2(\Gamma)$. Запишем тождество (8) для $u(x)$, $\eta(x)$ из $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$ в виде

$$[u,\eta] + \ell(u,\eta) = (f,\eta), \tag{20}$$

где

$$\ell(u,\eta) = \int\limits_{\Gamma} b(x)u(x)\eta(x)dx.$$

В силу предположений (7) и леммы 4 об эквивалентности норм

$$|\ell(u,\eta)| \le b^* \|u\|_{L_2(\Gamma)} \cdot \|\eta\|_{L_2(\Gamma)} \le C_{b^*} \|u\|_a \cdot \|\eta u\|_a\,, \tag{21}$$

т. е. $\ell(u,\eta)$ при произвольном фиксированном элементе $u(x) \in W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$ есть линейный функционал над $\eta(x)$ в пространстве $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$. По теореме Ф. Рисса [1] $\ell(u,\eta)$ однозначно представим в виде скалярного произведения

$$\ell(u,\eta) = [Au,\eta]\,, \quad \forall\ \eta \in W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi), \tag{22}$$

причем A есть ограниченный оператор в $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$ с нормой, не превосходящей C_{b^*}, симметричность оператора A очевидна. Выражение (f,η) также определяет линейный функционал над $\eta(x)$ в пространстве $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$, и в силу теоремы Ф. Рисса существует единственный элемент $F(x) \in W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$ такой, что $(f,\eta) = [F,\eta]$ для $\forall\ \eta(x) \in W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$. Таким образом, тождество (20) эквивалентно тождеству

$$[u,\eta] + [Au,\eta] = [F,\eta], \quad \forall\ \eta(x) \in W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi), \tag{23}$$

а, значит, операторному уравнению

$$u + Au = F \tag{24}$$

в пространстве $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$.

Покажем, что A является вполне непрерывным оператором в $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$. Для этого убедимся, что любая слабо сходящаяся в $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$ последовательность $\{u_k(x)\}_{k\ge1}$ преобразуется оператором A в сильно сходящуюся последовательность $\{(Au_k)(x)\}_{k\ge1}$. Ввиду ограниченности оператора A последовательсть $\{(Au_k)(x)\}_{k\ge1}$ слабо сходится к $(Au)(x)$, где $u(x)$ есть слабый предел $\{u_k(x)\}_{k\ge1}$. В силу теоремы 2 последовательности $\{u_k(x)\}_{k\ge1}$ и $\{(Au_k)(x)\}_{k\ge1}$ сходятся сильно в $L_2(\Gamma)$ к $u(x)$ и $(Au)(x)$, соответственно. Отсюда, учитывая определение (19) и неравенство (17), получаем

$$\begin{aligned} \|Au_k - Au_m\|_a^2 &= [Au_k - Au_m, Au_k - Au_m] = [A(u_k - u_m), Au_k - Au_m] = \\ &= \ell(u_k - u_m, Au_k - Au_m) \le b^* \|u_k - u_m\|_{L_2(\Gamma)} \cdot \|Au_k - Au_m\|_{L_2(\Gamma)}\,. \end{aligned}$$

При $k, m \to \infty$ правая часть стремится к нулю, следовательно, $\{(Au_k)(x)\}_{k\ge1}$ – сильно сходящаяся в $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$ последовательность. Полная непрерывность оператора A доказана.

Для уравнения (24) справедлива первая теорема Фредгольма:

Теорема 3. *Если задача* (5), (6) при $\lambda = 0$ *не может иметь более одного обобщенного решения из* $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$, *то она разрешима в* $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$ *для любой* $f \in L_2(\Gamma)$.

Теорема 3 утверждает, что из единственности решения задачи (5), (6) вытекает его существование.

Рассмотрим далее семейство краевых задач (5), (6) с произвольным параметром λ. Рассуждая так же, как и выше, приходим к уравнению в $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$

$$u + Au = \lambda Bu + F, \tag{25}$$

где оператор B определяется на $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$ аналогично оператору A своей билинейной формой:

$$[u,\eta] = \int\limits_{\Gamma} u(x)\eta(x)dx.$$

Оператор B симметричен. Так же, как и выше показывается, что оператор B вполне непрерывен в $W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$.

Для фиксированного λ_0 представим уравнение (25) в виде

$$u + Au - \lambda_0 Bu = (\lambda - \lambda_0)Bu + F \tag{26}$$

и рассмотрим оператор $D = E + A - \lambda_0 B$. Пусть $v(x) \in W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi)$ и $\omega(x) = (Dv)(x)$. Это равенство эквивалентно тождеству

$$\begin{aligned} L(v,\eta) &\equiv \int\limits_{\Gamma} \left[a(x)\tfrac{dv(x)}{dx}\tfrac{d\eta(x)}{dx} + b(x)v(x)\eta(x)\right]dx = \\ &= \lambda_0 \int\limits_{\Gamma} v(x)\eta(x)dx + \int\limits_{\Gamma} \omega(x)\eta(x)dx, \quad \forall\ \eta(x) \in W_{2,0}^2(a,\Gamma,\xi). \end{aligned}$$

Из этого тождества с $\eta(x) = v(x)$ в силу неравенства (9), выведем неравенство

$$\begin{aligned} [\omega,v] = [dv,v] = [(E + A - \lambda_0 B)v,v] = L(v,v) - \lambda_0 \|v\|^2_{L_2(\Gamma)} \geq \\ \geq a_* \left\|\frac{dv(x)}{dx}\right\|^2_{L_2(\Gamma)} + b_* \|v\|^2_{L_2(\Gamma)} - \lambda_0 \|v\|^2_{L_2(\Gamma)} = \\ = a_* \left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|^2_{L_2(\Gamma)} + (b_* - \lambda_0)\|v\|^2_{L_2(\Gamma)}. \end{aligned} \tag{27}$$

При $\lambda_0 \leq b_*$ из (27) следует неравенство

$$\|v\|^2_a \leq c\,\|\omega\|^2_a = c\,\|Dv\|^2_a, \tag{28}$$

т. е. оператор D при таком λ_0 имеет ограниченный обратный оператор D^{-1}. Если положить $\lambda_0 = b_*$, то уравнение (26) примет вид

$$u = (\lambda - \lambda_0)D^{-1}Bu + D^{-1}F. \tag{29}$$

Оператор $D^{-1}B$, как произведение ограниченного на вполне непрерывный, является вполне непрерывным операторм. Ввиду этого для уравнения (29) справедливы три теоремы Фредгольма. Следовательно, для уравнения (29), а, значит, и для эквивалентной ему краевой задачи (5), (6) имеет место аналог теоремы 3 при $\lambda \leq b_*$:

Теорема 4. *Если задача* (5), (6) *при любом* $\lambda \le b_*$ *не может иметь более одного обобщенного решения из* $W^2_{2,0}(a,\Gamma,\xi)$, *то она разрешима в* $W^2_{2,0}(a,\Gamma,\xi)$ *для любой* $f \in L_2(\Gamma)$.

Рассмотрим далее множество собственных значений для краевой задачи (5), (6), т. е. множество таких чисел $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$, каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение $u_n(x)$ из $W^2_{2,0}(a,\Gamma,\xi)$ уравнения $u = (\lambda-\lambda_0)D^{-1}Bu$ или, что тоже, $u_n(x)$ удовлетворяет тождеству $L(u,\eta) = \lambda(u,\eta)$ при $\forall\ \eta(x) \in W^2_{2,0}(a,\Gamma,\xi)$. Последнее выражает тот факт, что $u_n(x)$ есть обобщенная собственная функция из $W^2_2(\Gamma)$ задачи

$$Lu = \lambda_n u,\ \ u|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{30}$$

а λ_n – соответствующее ей собственное значение. В силу симметричности дифференциального выражения (1) задача (30) совпадает со своей сопряженной.

Теорема 5. *Однозначная разрешимость краевой задачи* (5), (6) *нарушается при* $\lambda \in \{\lambda_n\}_{n\ge1}$, *образующего спектр этой задачи. Каждое* λ_n *имеет конечную кратность, предельной точкой для* $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ *является* $\lambda = \infty$.

Третья теорема Фредгольма для уравнения (29) дает необходимые и достаточные условия разрешимости при $\lambda = \lambda_n$. А именно, если $\lambda = \lambda_n$, то задача (29) разрешима для тех и только тех свободных членов $D^{-1}f$, которые ортогональны ко всем решениям $u_n(x)$ уравнения $u = (\lambda_n-\lambda_0)D^{-1}Bu$, т. е. для $D^{-1}F$ таких, что $\left[D^{-1}F, u_n\right] = 0$. Из последнего соотношения и симметричности D^{-1}, вытекает

$$0 = \left[D^{-1}F, u_n\right] = \left[F, D^{-1}u_n\right] = [F,\omega_n] = \int\limits_\Gamma f(x)\omega_n(x)dx,$$

т. е. $(f(x),\, \omega_n(x)) = 0$. Получена третья теорема Фредгольма для краевой задачи (5), (6).

Теорема 6. *Для разрешимости задачи* (5), (6) *при* $\lambda = \lambda_n$ *необходимо и достаточно, чтобы функция* f *была ортогональна в пространстве* $L_2(\Gamma)$ *всем обобщенным собственным функциям* $u_n(x)$. *При этом решение задачи* (5), (6) неединственно, *оно является суммой какого-либо частного решения и линейной комбинацией всех обобщенных собственных функций* $u_n(x)$.

Автор приносит благодарность В. В. Провоторову за внимание к работе и плодотворное обсуждение результатов.

Список литературы

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Физматлит, 1973. –408 с.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4, Ч. 1 – М.: Наука, 1974. – 336 с.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4, Ч. 2 – М.: Наука, 1981. – 550 с.

Поступила в редакцию 25.12.2011.