Математика и ее приложения : ЖИМО. 2012. Вып. 1 (9). С. 25–30

УДК 517.958

Ю. А. Гнилицкая[1]

Об управлении волновыми процессами на сетях

Ключевые слова: сетеподобные конструкции, волновое уравнение, краевая задача на графе, граничное управление колебаниями, спектральный анализ.

В работе обосновывается метод нахождения граничных управляющих воздействий в задачах управления колебаниями сетеподобных конструкций. Представлен метод нахождения их в модельной задаче перевода упругой системы из m струн из начального состояния покоя в заданное финальное состояние. Главный результат исследования представлен в виде готовых формул, определяющих искомые граничные управления как функции времени.

Key words: network design, wave equation, boundary value problem on a graph, the boundary control of vibrations, spectral analysis.

In the work justifies the method of location of the boundary control actions in the problems of control of oscillations сетеподобных structures. The method of finding them in the model problem of translation of the elastic system of m strings from the initial state of rest in the desired final state. The main result of the study is presented in the form of ready-made formulas defining the boundary control as a function of time.

В задачах управления колебаниями сетеподобных упругих конструкций (колебания линейного фрагмента сети описываются классическим волновым уравнением, в каждом узле заданы условия связи), как правило, преследуются две цели: 1) погасить нежелательные колебания и неустойчивости, 2) генерировать колебания заданных частот. Управляющие воздействия на объект прилагаются либо во всех узлах конструкции, либо только на границе конструкции, т. е. в граничных узлах сети [1]. Ниже предлагается математический формализм, используемый для описания колебательных явлений на сетях, и вытекающие из этого возможности отыскания граничных воздействий при переводе дифференциальной системы из заданного начального состояния в заданное финальное состояние. На примере модельной задачи на графе-звезде обосновывается существование граничных управляющих воздействий и представлен метод их нахождения как продолжение исследования работы [2]. Схожий процесс, по-видимому, происходит и в биологической системе на клеточном уровне (метаболизм клеток). Продукты одних химических реакций, происходящих в клетке, являются субстратами для других, образуя цепи метаболических реакций. Цепи имеют точки разветвления – узлы реакций, продукты которых могут быть использованы в нескольких метаболических цепях, в совокупности представляющих собой сеть.

Для упрощения полученных формул длины ребер графа кратны π, волновое уравнение используется в простейшей форме: $u_{tt} = u_{xx}$. Главный результат исследования представлен в виде готовых формул, определяющих искомые граничные управления как функции времени.

[1]Воронежский государственный университет; E-mail: uliya_al@mail.ru

1. Основные понятия

Пусть Γ – граф-звезда, состоящий из m одинаковых ребер γ_k и одного внутреннего узла ξ. При этом ребра γ_k $(k = \overline{1, m-1})$ параметризованы отрезком $[0, \pi/2]$ (ориентация на ребрах "к узлу ξ"), ребро γ_m – отрезком $[\pi/2, \pi]$ (ориентация на ребре – "от узла ξ").

Обозначим через $C(\Gamma)$ множество непрерывных на Γ функций, $C[\Gamma]$ – множество кусочно непрерывных функций, $C^2[\Gamma]$ – множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$.

Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля на звезде Γ в $C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma]$, которая при фиксированной параметризации определяется следующим набором уравнений на ребрах γ_k:

$$-\tfrac{d^2}{dx^2} y_{\gamma_k} = \lambda y_{\gamma_k} \ (k = \overline{1, m}), \tag{1}$$

уравнением в узле ξ

$$\sum_{k=1}^{m-1} \tfrac{d}{dx} y(\pi/2)_{\gamma_k} = \tfrac{d}{dx} y(\pi/2)_{\gamma_m} \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$y(0)_{\gamma_k} = 0 \ (k = \overline{1, m-1}), \tag{3}$$

$$y(\pi)_{\gamma_m} = 0, \tag{4}$$

здесь λ – спектральный параметр.

Имеют место следующие необходимые в дальнейшем утверждения [1]:

1. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля (1)–(4) вещественны. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(\Gamma)$.

2. Множество $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ $(\lambda_n = n^2)$ образует совокупность собственных чисел, при этом если n нечетное, то λ_n простое, при n четном – кратное, кратность его равна $m-1$.

Расположим собственные значения по возрастанию в цепочку вида:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \underset{m-1}{\ldots} \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \underset{m-1}{\ldots} \leq \lambda_4 \leq \ldots$$

Собственное значение входит в цепочку неравенств столько раз, какова его кратность, причем каждому собственному значению соответствует своя собственная функция. Обозначим такое множество функций $\{u_n(x)\}_{n \geq 1}$.

Структура множества собственных функций выглядит следующим образом:

при $n = 2l - 1$ $(l = 1, 2, \ldots)$

$$u_{2l-1}(x) = \tfrac{2}{\sqrt{m\pi}} \sin(2l-1)x, \ x \in \gamma_k, \ k = \overline{1, m};$$

при $n = 2l$ $(l = 1, 2, ...)$

$$u^1_{2l}(x) = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}} \sin 2lx, \ x \in \gamma_1, \\ 0, \ x \in \gamma_k, \ k = \overline{2, m-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{2}} \sin 2lx, \ x \in \gamma_m, \end{cases}$$

$$\underset{(i=\overline{2,m-2})}{u^i_{2l}(x)} = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{i+1}}(-\frac{1}{\sqrt{i}}) \sin 2lx, \ x \in \gamma_k, \ k = \overline{1, i-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{i+1}}\sqrt{i} \sin 2lx, \ x \in \gamma_i, \\ 0, \ x \in \gamma_k, \ k = \overline{i+1, m-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{i+1}}\frac{1}{\sqrt{i}} \sin 2lx, \ x \in \gamma_m, \end{cases}$$

$$u^{m-1}_{2l}(x) = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{m-1}} \sin 2lx, \ x \in \gamma_k, \ k = \overline{1, m-2}, \\ \sqrt{m-1} \sin 2lx, \ x \in \gamma_{m-1}, \\ \frac{1}{\sqrt{m-1}} \sin 2lx, \ x \in \gamma_m. \end{cases}$$

Очевидно, полученное множество является ортонормальной системой собственных функций задачи Штурма — Лиувилля (1)–(4).

3. Система собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ полна и образует ортогональный базис в $L_2(\Gamma)$.

Колебания на каждом из ребер графа Γ при произвольном значении времени $t \in (0, T)$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} \tag{5}$$

внутри каждого ребра γ_k $(k = \overline{1, m-1})$ и соотношениями в узле ξ (условия непрерывности и гладкости)

$$\Omega(\tfrac{\pi}{2}, t)_{\gamma_k} = \Omega(\tfrac{\pi}{2}, t)_{\gamma_m} \ (k = \overline{1, m-1}), \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x}\Omega(\tfrac{\pi}{2}, t)_{\gamma_k} = \frac{\partial}{\partial x}\Omega(\tfrac{\pi}{2}, t)_{\gamma_m}, \ t \in (0, T). \tag{7}$$

К ним добавляются начальные условия при $x \in \Gamma$, $t = 0$:

$$\Omega(x, 0) = 0, \ \frac{\partial}{\partial t}\Omega(x, 0) = 0 \tag{8}$$

и финальные условия при $x \in \Gamma$, $t = T$:

$$\Omega(x, T) = \tilde{\varphi}(x), \ \frac{\partial}{\partial t}\Omega(x, T) = \tilde{\psi}(x), \tag{9}$$

а также граничные условия в граничных узлах графа:

$$\Omega(0, t)_{\gamma_k} = \mu_k(t) \ (k = \overline{1, m-1}), \quad \Omega(\pi, t)_{\gamma_m} = \nu(t), \quad t \in (0, T); \tag{10}$$

$\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ – заданные функции, $\mu_k(t)$, $\nu(t)$ – управляющие функции, $\tilde{\varphi}(x) \in C^2[\Gamma]$, $\tilde{\psi}(x) \in C^1[\Gamma]$ и $\mu_k(t)(k = \overline{1, m-1}), \nu(t) \in C^2(0, T)$ и выполнены условия согласования $(k = \overline{1, m-1})$:

$$\begin{aligned} &\varphi(0)_{\gamma_k} = \mu_k(0), \quad \psi(0)_{\gamma_k} = \mu'_k(0), \\ &\tilde{\varphi}(0)_{\gamma_k} = \mu_k(T), \quad \tilde{\psi}(0)_{\gamma_k} = \mu'_k(T), \\ &\varphi(\pi)_{\gamma_m} = \nu(0), \quad \psi(\pi)_{\gamma_m} = \nu'(0), \\ &\tilde{\varphi}(\pi)_{\gamma_m} = \nu(T), \quad \tilde{\psi}(\pi)_{\gamma_m} = \nu'(T). \end{aligned} \tag{11}$$

Задача управления. Задача о переводе покоящейся дифференциальной системы (4)–(10) в заданное состояние состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(x)(k=\overline{1,m-1})$, $\nu(x)$ из граничных условий (10) таких, чтобы в момент времени $t=0$ выполнялись нулевые начальные условия (8), а в момент времени $t=T$ выполнялись финальные условия (9).

2. Решение задачи управления

Функцию $\Omega(x,t)$ представим в виде ряда Фурье по системе $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ задачи Штурма — Лиувилля (1)–(4):

$$\Omega(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)u_n(x). \tag{12}$$

В силу ортогональности функций $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ получим

$$a_n(t)=\int_{\Gamma}\Omega(x,t)u_n(x)dx. \tag{13}$$

Определяя функции $a_n(t)$ с условиями $a_n(\pi)=\tilde{\varphi}_n$, $\dot{a}_n(\pi)=\tilde{\psi}_n$ ($\tilde{\varphi}_n$, $\tilde{\psi}_n$ – коэффициенты Фурье функций $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ при разложении их по системе $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$), получаем:

$$\Omega(x,t)= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\left\{\tilde{\varphi}_n\cos n(\pi-t)-\frac{\tilde{\psi}_n}{n}\sin n(\pi-t)+\frac{1}{n}\int_t^{\pi} z_n(\tau)\sin n(t-\tau)d\tau\right\} \tag{14}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega(x,t)= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\left\{n\tilde{\varphi}_n\sin n(\pi-t)+\tilde{\psi}_n\cos n(\pi-t)+\int_t^{\pi} z_n(\tau)\cos n(t-\tau)d\tau\right\}, \tag{15}$$

где

$$z_n(t)=\sum_{k=1}^{m-1}\mu_k(t)\frac{d}{dx}u_n(0)_{\gamma_k}-\nu(t)\frac{d}{dx}u_n(\pi)_{\gamma_m}.$$

Систему (4)–(7) можно перевести из состояния (8) ($\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$, $x\in\Gamma$) в финальное состояние (9) за время $t=\pi$ ($T=\pi$). Учитывая представление $z_n(t)$ и условия (9), из соотношений (14), (15) получаем следующие равенства ($n=1,2,...$):

$$\tilde{\varphi}_n\cos n\pi- -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\mu_k(\tau)\frac{d}{dx}u_n(0)_{\gamma_k}-\nu(\tau)\frac{d}{dx}u_n(\pi)_{\gamma_m}\right)\sin n\tau d\tau=0, \tag{16}$$

$$\tilde{\psi}_n \cos n\pi + \\ + \int\limits_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \mu_k(\tau) \tfrac{d}{dx} u_n(0)_{\gamma_k} - \nu(\tau) \tfrac{d}{dx} u_n(\pi)_{\gamma_m} \right) \cos n\tau d\tau = 0. \qquad (17)$$

Заметим, что полученные соотношения (16), (17) являются моментными равенствами для определения управляющих воздействий $\mu_k(x)$, $(k = \overline{1, m-1}), \nu(x)$ на систему (4)–(7).

Следуя идеям монографии [3], в последних соотношениях получим коэффициенты Фурье для некоторых функций, разложенных по системе $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$).

Последующие преобразования будут связаны с тем, чтобы получить из моментных равенств (16), (17) соотношения, связывающие известные функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ с требующими определения функциями $\mu_k(x)$, $(k = \overline{1, m-1}), \nu(x)$. Используя представление собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$), с учетом кратности собственных значений, проведем соответствующие преобразования и вычисления, позволяющие получить систему, связывающую заданные функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ и требующие определения управляющие функции.

Далее на графе Γ введем функции $M_i(x), (i = \overline{1, m-1})$, $V(x)$.

$$M_1(x) = \begin{cases} \mu_1(x),\ x \in \gamma_1 \cup \gamma_m, \\ 0,\ x \in \gamma_j,\ j = \overline{2, m-1}, \end{cases}$$

$$\underset{(i=\overline{2,m-1})}{M_i(x)} = \begin{cases} \mu_i(x) + \mu_i(\pi - x),\ x \in \gamma_i, \\ 0,\ x \in \gamma_j,\ j = \overline{1, m}\ (j \neq i), \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} \nu(\pi - x),\ x \in \gamma_1 \cup \gamma_m, \\ 0,\ x \in \gamma_j,\ j = \overline{2, m-1}, \end{cases}$$

$$\tfrac{d}{dx} M_1(x) = \begin{cases} \tfrac{d}{dx}\mu_1(x),\ x \in \gamma_1 \cup \gamma_m, \\ 0,\ x \in \gamma_j,\ j = \overline{2, m-1}, \end{cases}$$

$$\underset{(i=\overline{2,m-1})}{\tfrac{d}{dx} M_i(x)} = \begin{cases} \tfrac{d}{d\tau}\mu_i(x) - \tfrac{d}{dx}\mu_i(\pi - x),\ x \in \gamma_i, \\ 0,\ x \in \gamma_j,\ j = \overline{1, m}\ (j \neq i), \end{cases}$$

$$\tfrac{d}{dx} V(x) = \begin{cases} \tfrac{d}{dx}\nu(\pi - x),\ x \in \gamma_1 \cup \gamma_m, \\ 0,\ x \in \gamma_j,\ j = \overline{2, m-1}, \end{cases}$$

и продолжения сужений $\tilde{\varphi}(x)_{\gamma_k}, \tilde{\psi}(x)_{\gamma_k}$ $(k = \overline{1, m})$ функций $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ на отрезок $[0, \pi]$:

$$\tilde{\varphi}_{\gamma_1\gamma_m}(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x)_{\gamma_1}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \tilde{\varphi}(x)_{\gamma_m}, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \end{cases} \quad \tilde{\psi}_{\gamma_1\gamma_m}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}(x)_{\gamma_1}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \tilde{\psi}(x)_{\gamma_m}, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \end{cases}$$

$$\underset{(k=\overline{2,m-1})}{\tilde{\varphi}_{\gamma_k}(x)} = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x)_{\gamma_k}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_{\gamma_1\gamma_m}(x) + \tilde{\varphi}_{\gamma_1\gamma_m}(\pi - x)), & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \end{cases}$$

$$\underset{(k=\overline{2,m-1})}{\tilde{\psi}_{\gamma_k}(x)} = \begin{cases} \tilde{\psi}(x)_{\gamma_k}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \frac{1}{2}(\tilde{\psi}_{\gamma_1\gamma_m}(x) + \tilde{\psi}_{\gamma_1\gamma_m}(\pi - x)), & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Учитывая условие

$$\mu_1(\pi - x) - 2\mu_i(\pi - x) + \nu(\pi - x) \equiv 0,\ x \in [0, \pi/2], \quad i = \overline{2, m-1} \qquad (18)$$

для функций $\mu_k(x)$, $(k = \overline{1, m-1}), \nu(x)$, приходим у соотношениям на ребрах γ_k $(k = \overline{1, m})$:

на $\gamma_1 \cup \gamma_m$ $(x \in [0, \pi])$

$$\begin{aligned} &-\tilde{\varphi}_{\gamma_1\gamma_m}(\pi - x) - \mu_1(x) - \nu(\pi - x) = 0, \\ &-\tilde{\psi}_{\gamma_1\gamma_m}(\pi - x) - \tfrac{d}{dx}\mu_1(x) + \tfrac{d}{dx}\nu(\pi - x) = 0; \end{aligned} \qquad (19)$$

на γ_k, $k = \overline{2, m-1}$ $(x \in [0, \pi/2])$

$$\begin{aligned} &-\tilde{\varphi}_{\gamma_k}(\pi - x) - \mu_k(x) - \mu_k(\pi - x) = 0, \\ &-\tilde{\psi}_{\gamma_k}(\pi - x) - \tfrac{d}{dx}\mu_k(x) + \tfrac{d}{dx}\mu_k(\pi - x) = 0. \end{aligned} \qquad (20)$$

Таким образом, задача перевода покоящейся системы (4)–(10) в заданное состояние свелась к решению систем (19), (20) относительно управляющих функций $\mu_k(x)$ $(k = \overline{1, m-1})$, $\nu(x)$ при условии (18) на эти функции.

3. Основные результаты

Из систем (19), (20) определяются управляющие воздействия:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1(t) &= -\tfrac{1}{2}\tilde{\varphi}_{\gamma_1\gamma_m}(\pi - t) + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi - t} \tilde{\psi}_{\gamma_1\gamma_m}(\tau)d\tau + \tfrac{1}{2}\tilde{\varphi}(0)_{\gamma_1}, \\ \nu(t) &= -\tfrac{1}{2}\tilde{\varphi}_{\gamma_1\gamma_m}(t) - \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{t} \tilde{\psi}_{\gamma_1\gamma_m}(\tau)d\tau - \tfrac{1}{2}\tilde{\varphi}(0)_{\gamma_1}, \end{aligned}\right. \quad t \in [0, \pi],$$

$$\underset{(k=\overline{2,m-1})}{\mu_k(t)} = \frac{1}{2}\begin{cases} -\tilde{\varphi}_{\gamma_k}(\pi - t) + \int\limits_t^{\pi/2} \tilde{\psi}_{\gamma_k}(\pi - \tau)d\tau, & t \in [0, \pi/2], \\ -\tilde{\varphi}_{\gamma_k}(t) - \int\limits_{\pi - t}^{\pi/2} \tilde{\psi}_{\gamma_k}(\pi - \tau)d\tau, & t \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Представленная модель используется в анализе колебательных процессов, происходящих во многих технических объектах, например в антенных конструкциях различных типов.

Список литературы

1. *Провоторов В. В.* Собственные функции краевых задач на графах и приложения. Воронеж : Научная книга, 2008. 247 с.
2. *Гнилицкая Ю.А.* Граничное управление колебаниями системы струн // Процессы управления и устойчивость : Тр. 43-й Междунар. науч. конф. аспирантов и студентов / под ред. А. С. Еремина, Н. В. Смирнова. СПб. : Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 21–25.
3. *Знаменская Л. Н.* Управление упругими колебаниями. М. : Физматлит, 2004. 176 с.

Поступила в редакцию 10.12.2012.