Математика и ее приложения : ЖИМО. 2012. Вып. 1 (9). С. 41–44

УДК 512.543

А. В. Розов[1]

О нильпотентных группах конечного ранга

Ключевые слова: общий ранг группы, специальный ранг группы, нильпотентная группа, π-группа, π-полный элемент, аппроксимируемость конечными π-группами.

Показано, что для нильпотентных групп конечность общего ранга равносильна конечности специального ранга. Для произвольного множества π простых чисел доказано, что нильпотентная группа конечного ранга аппроксимируема конечными π-группами тогда и только тогда, когда она не содержит неединичных π-полных элементов.

Key words: general group rank, special group rank, nilpotent group, π-group, π-radicable element, residually π-finite group.

We prove that finiteness of special and general ranks is equivalent for nilpotent groups. Also we prove that for any set π of primes nilpotent group G is residually π-finite if and only if it has no non-trivial π-radicable elements.

А. И. Мальцев в [3] ввел два понятия ранга для произвольных групп. Группа G называется группой конечного общего ранга, если существует целое положительное число R такое, что всякое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой R-порожденной подгруппе группы G. Группа G называется группой конечного специального ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Наименьшие числа R и r, обладающие такими свойствами, называются общим и специальным рангами группы G соответственно. Очевидно, что любая группа конечного специального ранга имеет конечный общий ранг.

А. И. Мальцев заметил, что для абелевых групп конечность общего ранга равносильна конечности специального ранга. На самом деле это верно для произвольной нильпотентной группы G. Действительно, пусть G – нильпотентная группа конечного общего ранга, т. е. существует целое положительное число R такое, что любое конечное подмножество M группы G содержится в некоторой ее R-порожденной подгруппе.

Обозначим через F свободную нильпотентную группу ступени c с R свободными образующими, где c – ступень нильпотентности группы G. Хорошо известно, что конечно порожденные нильпотентные группы являются полициклическими. Поэтому F – полициклическая группа. Обозначим через r длину какого-нибудь полициклического ряда группы F.

Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы G. Покажем, что она порождается не более чем r элементами. Пусть M – конечное множество, порождающее H. Так как общий ранг группы G конечен, то M со-

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: post-box023@mail.ru

держится в некоторой R-порожденной подгруппе P группы G. Очевидно, что H – подгруппа в P. Группа P является R-порожденной нильпотентной группой ступени не выше c, и поэтому P изоморфна некоторой фактор-группе группы F. Отсюда и из того, что в F существует полициклический ряд длины r, следует, что и в группе P существует полициклический ряд длины r. А поскольку H – подгруппа группы P, то и в H существует полициклический ряд длины r. Поэтому H порождается не более чем r элементами. Таким образом, G – группа конечного специального ранга.

Далее для нильпотентной группы G будем использовать термин «конечный ранг» вместо терминов «конечный общий ранг» и «конечный специальный ранг». Для нильпотентных групп конечного ранга нами получен критерий аппроксимируемости конечными π-группами.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой конечными π-группами (или, короче, $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную π-группу, при котором образ элемента x отличен от единицы. Целое неотрицательное число n называется π-числом, если все его простые делители принадлежат множеству π. Конечная группа называется π-группой, если ее порядок является π-числом. Элемент a группы G называется π-полным, если для любого π-числа n уравнение

$$x^n = a$$

разрешимо в группе G.

Теорема 1. *Пусть G – группа, $\omega_\pi(G)$ – множество всех π-полных элементов из G, $\sigma_\pi(G)$ – пересечение всех нормальных подгрупп конечного π-индекса группы G. Тогда $\omega_\pi(G) \subseteq \sigma_\pi(G)$. Кроме того, если группа G нильпотентна и имеет конечный ранг, то $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$. В частности, нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π-полных элементов, отличных от 1.*

Частным случаем этой теоремы является результат Д. Н. Азарова и И. Г. Васьковой из [1]. В [1] доказано, что нильпотентная группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит полных элементов, отличных от 1.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть G – нильпотентная группа ступени c. Тогда уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G для любого элемента a из G^{n^c} $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [2, лемма 2].

Лемма 2. *Пусть F – периодическая разрешимая группа конечного специального ранга, порядки элементов которой ограничены. Тогда группа F*

конечна. В частности, если G – разрешимая группа конечного специального ранга, а π – некоторое множество простых чисел, то для каждого целого положительного π-числа m степенная подгруппа G^m имеет конечный π-индекс в группе G.

Доказательство. Пусть

$$1 = F_0 \leq F_1 \leq \ldots \leq F_n = F \tag{1}$$

– субнормальный ряд группы F с абелевыми факторами. Очевидно, что эти факторы являются периодическими абелевыми группами конечного ранга и порядки их элементов ограничены. Следовательно, все они конечны. Действительно, рассмотрим какой-нибудь фактор $F_i/F_{i-1} = S_i$ ряда (1). Пусть его ранг равен r, а порядки элементов ограничены числом n. Тогда любое его конечное подмножество M содержит не более n^r элементов, поскольку оно содержится в некоторой r-порожденной абелевой подгруппе H группы S_i, порядки элементов которой ограничены числом n. Отсюда следует, что группа S_i сама конечна. Таким образом, все факторы ряда (1) конечны, и поэтому группа F также конечна. ■

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы.

Пусть G – группа, $\omega_\pi(G)$ – множество всех π-полных элементов группы G, $\sigma_\pi(G)$ – пересечение всех нормальных подгрупп конечного π-индекса группы G. Покажем, что $\omega_\pi(G) \subseteq \sigma_\pi(G)$. Предположим от противного, что существует π-полный элемент a группы G, не принадлежащий $\sigma_\pi(G)$. Так как в конечной π-группе нет π-полных элементов, отличных от 1, то для любого гомоморфизма φ группы G на конечную π-группу верно равенство

$$a\varphi = 1. \tag{2}$$

С другой стороны, так как $a \notin \sigma_\pi(G)$, то найдется нормальная подгруппа N группы G конечного π-индекса, не содержащая a. При этом образ элемента a относительно естественного гомоморфизма $\varepsilon : G \to G/N$ отличен от 1. Получили противоречие с (2). Поэтому

$$\omega_\pi(G) \subseteq \sigma_\pi(G).$$

Предполагая дополнительно, что G – нильпотентная группа конечного ранга, докажем, что

$$\sigma_\pi(G) \subseteq \omega_\pi(G).$$

Допустим от противного, что некоторый элемент a из G принадлежит $\sigma_\pi(G)$, но не является π-полным. Тогда найдется целое положительное π-число n такое, что уравнение

$$x^n = a$$

не разрешимо в группе G. Отсюда по лемме 1 следует, что

$$a \notin G^{n^c},$$

где c – ступень нильпотентности группы G. По лемме 2 подгруппа G^{n^c} имеет конечный π-индекс в группе G. Таким образом, элемент a не принадлежит нормальной подгруппе G^{n^c} конечного π-индекса группы G. Это противоречит тому, что $a \in \sigma_\pi(G)$. Мы видим, таким образом, что

$$\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G),$$

и тем самым теорема доказана.

Список литературы

1. *Азаров Д. Н., Васькова И. Г.* О финитной аппроксимируемости нильпотентных групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Вып. 18. С. 9–16.
2. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.
3. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сборник. 1948. Т. 22, № 2. С. 351–352.

Поступила в редакцию 18.02.2012.