Математика и ее приложения : ЖИМО. 2012. Вып. 1 (9). С. 45–52

УДК 512.543

Е. В. Соколов[1]

Некоторые аппроксимационные свойства свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами

Ключевые слова: свободное произведение групп с централизованными подгруппами, аппроксимируемость конечными π-группами, аппроксимируемость конечными разрешимыми π-группами, отделимость циклических подгрупп.

Пусть $\mathcal{BN}$ — класс нильпотентных групп, ограниченных в смысле А. И. Мальцева, G — свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K, причем группы A и B либо принадлежат классу $\mathcal{BN}$, либо аппроксимируются $\mathcal{BN}$-группами без кручения, $H, K \in \mathcal{BN}$. Пусть также π — некоторое непустое множество простых чисел. Получен критерий аппроксимируемости группы G конечными π-группами. Установлено, что аппроксимируемость группы G конечными π-группами равносильна ее аппроксимируемости конечными разрешимыми π-группами. Доказано, что если группа G аппроксимируется конечными π-группами, то все ее циклические π'-изолированные подгруппы отделимы в классе конечных разрешимых π-групп.

Key words: free product of groups with centralizing subgroups, residually π-finite, residually soluble π-finite, cyclic subgroups separability.

Let $\mathcal{BN}$ be the class of all nilpotent groups which are bounded in a sense of A. I. Mal'cev, let A and B be $\mathcal{BN}$-groups or residually torsion-free-$\mathcal{BN}$ groups, and let G be the free product of groups A and B with centralizing $\mathcal{BN}$-subgroups H and K. Let further π be a nonempty set of prime numbers, let $\mathcal{F}_\pi$ be the class of all finite π-groups, and let $\mathcal{FS}_\pi$ be the class of all finite soluble π-groups. We obtain the criterion for group G to be residually $\mathcal{F}_\pi$ and prove that the properties 'to be residually $\mathcal{F}_\pi$' and 'to be residually $\mathcal{FS}_\pi$' are equivalent for this group. We prove also that if group G is residually $\mathcal{F}_\pi$ then all its π'-isolated cyclic subgroups are $\mathcal{FS}_\pi$-separable.

Одной из причин интенсивного исследования обобщенных свободных произведений групп служит возможность применения полученных результатов к изучению свойств тех групп и теоретико-групповых конструкций, строение которых может быть описано в терминах свободного произведения с объединенной подгруппой. Примером конструкции такого рода является свободное произведение двух групп с централизованными подгруппами, введенное в книге [4].

Напомним (см. [4], с. 231), что *свободным произведением групп A и B с централизованными подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$* называется группа

$$G = \langle A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1 \rangle,$$

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

представляющая собой фактор-группу свободного произведения групп A и B по нормальному замыканию всех слов вида $a^{-1}k^{-1}ak$, $a \in A$, $k \in K$ и $b^{-1}h^{-1}bh$, $b \in B$, $h \in H$ (введенные здесь обозначения предполагаются фиксированными до конца статьи). Если $H = A$ или $K = B$, то группа G превращается в обычное прямое произведение групп A и B, свойства которого хорошо известны. Поэтому всюду далее мы будем считать подгруппы H и K собственными.

Следуя [5], подгруппу Y некоторой группы X будем называть *отделимой* (в этой группе) *классом групп* $\mathcal{C}$ или, короче, $\mathcal{C}$*-отделимой*, если для любого элемента $x \in X \backslash Y$ существует гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, при котором x переходит в элемент, не принадлежащий образу подгруппы Y. Как обычно, под *финитной отделимостью* будем понимать отделимость в классе всех конечных групп.

Отметим, что понятие отделимости является обобщением понятия аппроксимируемости, поскольку $\mathcal{C}$-аппроксимируемость произвольной группы X равносильна $\mathcal{C}$-отделимости ее единичной подгруппы для любого класса групп $\mathcal{C}$.

Аппроксимационные свойства свободного произведения с централизованными подгруппами изучались в работах Е. Д. Логиновой [1, 2, 3]. Ею, в частности, доказаны следующие два утверждения.

Теорема 1. *Группа G финитно аппроксимируема (аппроксимируема конечными p-группами) тогда и только тогда, когда группы A и B финитно аппроксимируемы (соответственно, аппроксимируемы конечными p-группами), а подгруппы H и K в них финитно отделимы (соответственно, отделимы в классе конечных p-групп).*

Теорема 2. *Если группа G финитно аппроксимируема и в группах A и B все циклические подгруппы финитно отделимы, то и в группе G все циклические подгруппы финитно отделимы.*

Напомним далее, что абелева группа называется *ограниченной* в смысле А. И. Мальцева [5], если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части конечны. Нильпотентную группу будем называть *ограниченной*, если она обладает центральным рядом с ограниченными абелевыми факторами. Класс всех ограниченных нильпотентных групп обозначим через $\mathcal{BN}$. Очевидно, что этот класс содержит все конечно порожденные нильпотентные группы.

В настоящей статье доказано утверждение, позволяющее обобщить и уточнить теоремы 1 и 2 в случае, когда свободные множители A и B являются $\mathcal{BN}$-группами или аппроксимируются $\mathcal{BN}$-группами без кручения, а централизованные подгруппы H и K принадлежат классу $\mathcal{BN}$. Отметим, что последнее условие выполняется автоматически, если $A, B \in \mathcal{BN}$, так как класс $\mathcal{BN}$ замкнут относительно взятия подгрупп (см. лемму 4 ниже). Чтобы сформулировать полученный результат, введем несколько вспомогательных обозначений.

Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел, π' — множество всех простых чисел, не принадлежащих π. Через $\mathcal{F}_\pi$ мы будем обозначать *класс всех конечных* π*-групп*, т. е. конечных групп, все простые делители порядков которых принадлежат множеству π. Очевидно, что если множество π содержит все простые числа, то $\mathcal{F}_\pi$ — это не что иное, как класс всех конечных групп. Если же множество π состоит из одного простого числа p, то класс $\mathcal{F}_\pi$ совпадает с классом всех конечных p-групп. Также через $\mathcal{FS}_\pi$ обозначим *подкласс* класса $\mathcal{F}_\pi$, состоящий из *всех конечных разрешимых* π*-групп*.

Напомним далее, что подгруппа Y некоторой группы X называется π'*-изолированной* в этой группе, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \in \pi'$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Необходимо отметить, что если π совпадает с множеством всех простых чисел, то π'-изолированной оказывается любая подгруппа. Поэтому требование π'-изолированности в данном случае ровным счетом ничего не означает.

Легко видеть, что произвольная подгруппа, отделимая в классе $\mathcal{F}_\pi$ или любом его подклассе, является π'-изолированной. Поэтому при изучении свойства отделимости таким классом имеет смысл ограничиться рассмотрением лишь π'-изолированных подгрупп.

Основным результатом данной статьи служит

Теорема 3. *Пусть обе группы A, B либо принадлежат классу $\mathcal{BN}$, либо аппроксимируются $\mathcal{BN}$-группами без кручения, $H, K \in \mathcal{BN}$, π — произвольное непустое множество простых чисел. Тогда следующие условия равносильны:*

1) подгруппы H и K π'-изолированы в сомножителях, группы A и B не имеют π'-кручения (последнее условие выполняется автоматически, если свободные множители аппроксимируется $\mathcal{BN}$-группами без кручения);

2) группа G $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема;

3) группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то все ее π'-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{FS}_\pi$-отделимы.

Очевидно, что в ситуации, когда A, B, H и K удовлетворяют указанным в формулировке выше условиям, теоремы 1 и 2 являются частными случаями теоремы 3, причем если π совпадает с множеством всех простых чисел, то теорема 3 дает более точный результат, позволяя говорить об аппроксимируемости и отделимости не просто в классе всех конечных групп, но в классе конечных разрешимых групп. Доказательству теоремы 3 посвящена оставшаяся часть статьи.

Прежде всего, напомним представление группы G в виде свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой.

Обозначим через H_1 и K_1 изоморфные копии подгрупп H и K и положим $M_1 = A \times K_1$, $N_1 = H_1 \times B$, $U = HK_1 \leqslant M_1$, $V = H_1K \leqslant N_1$.

Пусть также $\varphi : U \to V$ — изоморфизм, продолжающий изоморфизмы подгруппы H на подгруппу H_1 и подгруппы K_1 на подгруппу K. Рассмотрим свободное произведение P групп M_1 и N_1 с подгруппами U и V, объединенными относительно изоморфизма φ.

Легко видеть (см., напр., [1], предложение 3.1), что отображение, переводящее образующие группы P, относящиеся к группам A и B, в соответствующие образующие группы G, определяет изоморфизм группы P на группу G. Если считать группы M_1 и N_1 подгруппами группы P, то их образами в группе G относительно указанного изоморфизма будут подгруппы M и N, порожденные подгруппами A, K и H, B, соответственно. Таким образом, группа G является свободным произведением своих подгрупп M и N с объединенной подгруппой $W = HK$, а подгруппы M и N в свою очередь раскладываются в прямые произведения подгрупп A, K и H, B, соответственно.

Воспользуемся приведенным представлением группы G в виде обобщенного свободного произведения для доказательства импликации 3) $\Rightarrow$ 1).

Так как группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, ее единичная подгруппа является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой и, следовательно, π'-изолированной. Это означает, что в группе G нет π'-кручения. Но тогда его нет и в группах A и B.

Предположим теперь, что хотя бы одна из подгрупп H и K не является π'-изолированной в соответствующем свободном множителе. Пусть для определенности таковой будет подгруппа H. Тогда H не является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой в группе A и существует элемент $a \in A \backslash H$, попадающий в образ H при каждом гомоморфизме группы A на конечную π-группу.

Так как подгруппа K является собственной, найдется элемент $b \in B \backslash K$. Тогда элемент $g = [a, b]$ в обобщенном свободном произведении групп M и N имеет несократимую запись длины 4 и потому отличен от 1. С другой стороны, при каждом гомоморфизме ψ группы G на конечную π-группу $g\psi \in [H\psi, B\psi] = [H, B]\psi = 1$, что противоречит $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G.

Таким образом, подгруппы H и K являются π'-изолированными в сомножителях, что и требовалось.

Поскольку $\mathcal{FS}_\pi \subseteq \mathcal{F}_\pi$, из $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируемости группы G следует ее $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость, т. е. импликация 2) $\Rightarrow$ 3) также имеет место.

Пусть теперь выполняется условие 1: группы A и B не имеют π'-кручения, подгруппы H и K π'-изолированы в сомножителях. Для завершения доказательства теоремы нам необходимо показать, что в этом случае группа G $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема и все ее π'-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{FS}_\pi$-отделимы.

Если $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп и X — произвольная группа, то через $\mathcal{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат $\mathcal{C}$. Для каждой подгруппы Y группы X определим семейство $\mathcal{C}^*(X, Y)$ следующим образом:

$$\mathcal{C}^*(X, Y) = \{Z \cap Y \mid Z \in \mathcal{C}^*(X)\}.$$

Пусть p — некоторое простое число. Обозначим через $\mathcal{F}_p$ класс всех конечных p-групп и положим

$$\Theta_p(M) = \{X(Y \cap K) \mid X \in \mathcal{F}_p^*(A), Y \in \mathcal{F}_p^*(B)\},$$
$$\Theta_p(N) = \{(X \cap H)Y \mid X \in \mathcal{F}_p^*(A), Y \in \mathcal{F}_p^*(B)\}.$$

Лемма 1. *Для каждого простого числа p имеют место следующие включения:*

$$\Theta_p(M) \subseteq \mathcal{F}_p^*(G, M), \Theta_p(N) \subseteq \mathcal{F}_p^*(G, N).$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{F}_p^*(A)$, $Y \in \mathcal{F}_p^*(B)$ — произвольные подгруппы и $R = X(Y \cap K) \in \Theta_p(M)$. Отображение $\rho : G \to A/X \times B/Y$, продолжающее естественные гомоморфизмы группы A на A/X и группы B на B/Y, переводит все определяющие соотношения группы G в равенства, верные в группе $A/X \times B/Y$, и потому является гомоморфизмом. Так как $A/X \times B/Y$ — конечная p-группа, то $\ker \rho \in \mathcal{F}_p^*(G)$ и $\ker \rho \cap M \in \mathcal{F}_p^*(G, M)$.

Пусть $g \in \ker \rho \cap M$ — произвольный элемент. Запишем его в виде $g = ab$ для некоторых элементов $a \in A$, $b \in K$. Отображение ρ продолжает естественные гомоморфизмы групп A и B, поэтому $g\rho = aX \cdot bY$ и из включения $g \in \ker \rho$ следует, что $a \in X$ и $b \in Y$. Таким образом, $g \in X(Y \cap K) = R$ и в силу произвольности выбора элемента g имеет место соотношение $\ker \rho \cap M \subseteq R$. Поскольку обратное включение очевидно, $R = \ker \rho \cap M \in \mathcal{F}_p^*(G, M)$.

Утверждение $\Theta_p(N) \subseteq \mathcal{F}_p^*(G, N)$ доказывается аналогично. $\square$

Пусть снова $\mathcal{C}$ — какой-либо класс групп, Y — произвольная подгруппа некоторой группы X. Будем говорить, что группа X *$\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y*, если для любой подгруппы $Z \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $T \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $T \cap Y \leqslant Z$. Понятие квазирегулярности тесно связано с отделимостью, как показывает

Лемма 2 ([8], предложение 2.3.13). *Пусть X — некоторая группа, Y — ее $\mathcal{F}_\pi$-отделимая подгруппа. Группа X $\mathcal{F}_\pi$-квазирегулярна по подгруппе Y тогда и только тогда, когда все подгруппы из семейства $\mathcal{F}_\pi^*(Y)$ являются $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми в группе X.* $\square$

Отметим, что лемма 2 и приводимые ниже леммы 3, 5 и 7 справедливы для любого множества простых чисел π. Однако нам достаточно, чтобы их утверждения выполнялись лишь для множества π из формулировки теоремы 3.

Если p — некоторое простое число, то через p'-$\mathrm{Rt}(X, Y)$ будем обозначать множество всех корней $\{p\}'$-степеней, извлекающихся из элементов подгруппы Y в группе X. Таким образом,

$$p'\text{-}\mathrm{Rt}(X, Y) = \{x \in X \mid \exists\, q \in \mathbb{N}\ (p, q) = 1 \land x^q \in Y\}.$$

Хорошо известно (см., напр., [9], теорема 4.5), что для любой подгруппы Y нильпотентной группы X множество p'-$\mathrm{Rt}(X, Y)$ является подгруппой. Следствием этого замечания и теорем 1.4.6 и 1.5.5 из [8] является

Лемма 3. *Пусть группа X принадлежит классу $\mathcal{BN}$ или аппроксимируется $\mathcal{BN}$-группами без кручения, $Y \leqslant X$ — π'-изолированная $\mathcal{BN}$-подгруппа. Тогда подгруппа Y $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе X и для каждого $p \in \pi$ множество p'-$\mathrm{Rt}(X, Y)$ является подгруппой, $\mathcal{F}_p$-отделимой в группе X.* $\square$

Лемма 4 ([8], предложение 1.1.4). *Класс $\mathcal{BN}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений с конечным числом сомножителей.* $\square$

Лемма 5. *Пусть группа X принадлежит классу $\mathcal{BN}$ или аппроксимируется $\mathcal{BN}$-группами без кручения, $Y \leqslant X$ — π'-изолированная $\mathcal{BN}$-подгруппа. Тогда группа X $\mathcal{F}_p$-квазирегулярна по подгруппе Y для любого простого числа $p \in \pi$.*

Доказательство. Произвольная подгруппа $Z \in \mathcal{F}_\pi^*(Y)$ π'-изолирована в группе Y и принадлежит классу $\mathcal{BN}$, так как последний является наследственным согласно лемме 4. Поскольку подгруппа Y в свою очередь π'-изолирована в X, подгруппа Z также π'-изолирована, а потому и $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе X в силу леммы 3. Следовательно, группа X $\mathcal{F}_\pi$-квазирегулярна по подгруппе Y согласно лемме 2.

Пусть теперь $p \in \pi$ и $Z \in \mathcal{F}_p^*(Y)$. Тогда $Z \in \mathcal{F}_\pi^*(Y)$ и найдется подгруппа $T \in \mathcal{F}_\pi^*(X)$ такая, что $T \cap Y \leqslant Z$. Положим $R = p'$-$\mathrm{Rt}(X, T)$ и покажем, что $R \in \mathcal{F}_p^*(X)$ и $R \cap Y \leqslant Z$.

Непосредственно проверяется, что подгруппа R нормальна в группе X. Так как $T \leqslant R$, то фактор-группа X/R конечна. К тому же она не имеет $\{p\}'$-кручения. Следовательно, $R \in \mathcal{F}_p^*(X)$.

Пусть $x \in R \cap Y$ — произвольный элемент. Тогда найдется такое число $q \in \mathbb{N}$, что $(p, q) = 1$ и $x^q \in T$. Отсюда $x^q \in T \cap Y \leqslant Z$. Но подгруппа Z принадлежит семейству $\mathcal{F}_p^*(Y)$ и, стало быть, $\{p\}'$-изолирована в группе Y. Следовательно, $x \in Z$ и $R \cap Y \leqslant Z$ в силу произвольности выбора элемента x, что и требовалось. $\square$

Лемма 6. *Для любого простого числа $p \in \pi$ каждая подгруппа из семейства $\mathcal{F}_p^*(M)$ содержит подгруппу из семейства $\Theta_p(M)$ и каждая подгруппа из семейства $\mathcal{F}_p^*(N)$ содержит подгруппу из семейства $\Theta_p(N)$.*

Доказательство. Действительно, пусть $p \in \pi$ и $R \in \mathcal{F}_p^*(M)$. Положим $X = R \cap A$ и $Z = R \cap K$. Тогда $X \in \mathcal{F}_p^*(A)$ и $Z \in \mathcal{F}_p^*(K)$.

По условию теоремы подгруппа K π'-изолирована в группе B, поэтому в силу леммы 5 группа B $\mathcal{F}_p$-квазирегулярна по K. Следовательно, найдется такая подгруппа $Y \in \mathcal{F}_p^*(B)$, что $Y \cap K \leqslant Z$. Тогда $X(Y \cap K) \leqslant R$ и, стало быть, подгруппа $X(Y \cap K)$ является искомой.

Рассуждения для семейств $\mathcal{F}_p^*(N)$ и $\Theta_p(N)$ аналогичны. $\square$

Лемма 7 ([7], предложение 3). *Пусть Y — π'-изолированная подгруппа некоторой группы X. Тогда для любого элемента $x \in X \backslash Y$ найдется число $p \in \pi$ такое, что $x \notin p'$-$\mathrm{Rt}(X, Y)$.* $\square$

Будем говорить, что подгруппа Y группы X *отделима семейством нормальных подгрупп* Ω этой группы, если $\bigcap_{Z\in\Omega} YZ = Y$.

Лемма 8. *Любая π'-изолированная $\mathcal{BN}$-подгруппа группы M отделима семейством $\mathcal{FS}^*_\pi(G, M)$. Любая π'-изолированная $\mathcal{BN}$-подгруппа группы N отделима семейством $\mathcal{FS}^*_\pi(G, N)$.*

Доказательство проведем для группы M, рассуждения для группы N аналогичны.

Пусть Y — некоторая π'-изолированная $\mathcal{BN}$-подгруппа группы M и $g \in M\backslash Y$ — произвольный элемент. Нам необходимо указать подгруппу $L \in \mathcal{FS}^*_\pi(G, M)$, удовлетворяющую условию $g \notin YL$.

Согласно лемме 7 найдется такое число $p \in \pi$, что $g \notin p'\text{-Rt}(M, Y)$. В силу леммы 4 класс $\mathcal{BN}$ замкнут относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений. Поэтому группа M обладает тем же свойством, что и свободные множители A и B: либо принадлежит классу $\mathcal{BN}$, либо аппроксимируется $\mathcal{BN}$-группами без кручения. Следовательно, по лемме 3 множество $p'\text{-Rt}(M, Y)$ является подгруппой, $\mathcal{F}_p$-отделимой в M.

Воспользуемся этим и выберем подгруппу $T \in \mathcal{F}^*_p(M)$ так, чтобы выполнялось соотношение $g \notin p'\text{-Rt}(M, Y)T$. В силу леммы 6 найдется подгруппа $L \in \Theta_p(M)$, лежащая в T. Тогда $YL \leqslant p'\text{-Rt}(M, Y)T$ и $g \notin YL$. Остается заметить, что $\Theta_p(M) \subseteq \mathcal{F}^*_p(G, M)$ согласно лемме 1 и $\mathcal{F}^*_p(G, M) \subseteq \mathcal{FS}^*_\pi(G, M)$ ввиду очевидного включения $\mathcal{F}_p \subseteq \mathcal{FS}_\pi$. Таким образом, подгруппа L является искомой. $\square$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству оставшейся части теоремы 3.

Пусть элемент $g \in M$ и число $q \in \pi'$ таковы, что $g^q \in W$. Так как $M = AK$ и $[A, K] = 1$, то $g = ab$ для подходящих элементов $a \in A$, $b \in K$ и $g^q = a^q b^q$, откуда $a^q \in H$. По условию теоремы подгруппа H π'-изолирована в группе A, следовательно, $a \in H$ и $g \in W$. Таким образом, подгруппа W оказывается π'-изолированной в группе M.

Аналогичным образом проверяется, что подгруппа W π'-изолирована в группе N. Из отсутствия π'-кручения в группах A и B следует также, что π'-кручения нет и в группах M и N. Требуемое утверждение теперь вытекает из леммы 8 и основного результата работы [6], который применительно к классу $\mathcal{FS}_\pi$ может быть сформулирован следующим образом.

Лемма 9. *Пусть подгруппы 1 и W отделимы в группе M семейством $\mathcal{FS}^*_\pi(G, M)$, а в группе N — семейством $\mathcal{FS}^*_\pi(G, N)$. Тогда группа G $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема и π'-изолированная циклическая подгруппа группы G не является в ней $\mathcal{FS}_\pi$-отделимой тогда и только тогда, когда она сопряжена с подгруппой группы M или группы N, π'-изолированной в этой группе, но не отделимой семейством $\mathcal{FS}^*_\pi(G, M)$ или $\mathcal{FS}^*_\pi(G, N)$, соответственно.* $\square$

Список литературы

1. *Логинова Е. Д.* Аппроксимационные свойства свободных произведений групп с коммутирующими и централизованными подгруппами : дисс … канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2003.

2. *Логинова Е. Д.* О финитной отделимости подгрупп свободного произведения конечно порожденных абелевых групп с централизованными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2004. Вып. 3. С. 135–138.

3. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 1999. Вып. 2. С. 101–104.

4. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М. : Наука, 1974. 456 с.

5. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

6. *Соколов Е. В., Гудовщикова А. С.* Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 115–123.

7. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения : журн. Иван. мат. о-ва. 2011. Вып. 1 (8). С. 101–104.

8. *Соколов Е. В.* Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп. Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 124 с.

9. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

Поступила в редакцию 5.05.2012.