

А. М. Солунин¹

Об уравнениях движения в электродинамике. Уравнения движения частицы с переменной собственной массой

Ключевые слова: силовая характеристика магнитного поля, векторный потенциал.

Показано, что в классической электродинамике возможны уравнения движения с переменной собственной массой частицы. Для них получена зависимость собственной массы от электромагнитного поля. При малых скоростях выяснен смысл изменения массы частицы: ее масса в связанном состоянии меньше, чем в свободном на величину энергии связи. Показано, что кроме силы Лоренца на частицу действует дополнительная сила, с которой связан ряд известных, но необычных для электродинамики физических эффектов, к которым относится, например, смещение соленоидом интерференционной картины электронов (эффект Аронова – Бома).

Key words: force characteristic of magnetic field, vector potential.

It is shown that in classical electrodynamics equations of motion with variable proper mass of the particle are possible. For them, the dependence of the self-weight of the electromagnetic field was received. At low speeds, clarified the meaning of the change in mass of the particle: its mass in the bound state is less than the amount of free binding energy. It is shown that in addition to the Lorentz, the particle is affected by some additional force, which related to a number of known, but unusual for electrodynamics physical effects, which include, for example, the shift of interference pattern of electrons by solenoid (Aharonov – Bohm effect).

Введение

Уравнения движения в релятивистской механике имеют вид

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = F^\alpha. \quad (1)$$

Здесь F^α – 4-сила, P^α – 4-импульс тела

$$P^\alpha = m_0(\tau)U^\alpha, \quad (2)$$

где $m_0(\tau)$ – собственная масса частицы (4-скаляр), $d\tau$ – собственное время. Если уравнения движения свернуть со скоростью U_α , то с учетом (2) и того, что $U^\alpha U_\alpha = -1$, $U^\alpha dU_\alpha/d\tau = 0$, из (1) получим

$$\frac{dm_0(\tau)}{d\tau} = -F^\alpha U_\alpha. \quad (3)$$

© Солунин А. М., 2012

¹Ивановский государственный энергетический университет;
E-mail: solunin@yandex.ru

²Здесь $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$; $g_{\alpha\beta} = (+ + + -)$, $d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt$, $x_4 = ct$,

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{cd\tau} = \left(\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right).$$

Исходя из (3), можно различать случаи (типы уравнения), когда $F^\alpha U_\alpha = 0$ и когда $F^\alpha U_\alpha \neq 0$. В первом случае собственная масса частицы постоянна, а во втором является функцией собственного времени частицы. В первом случае уравнения движения частицы принимают вид

$$m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = F^\alpha, \quad (4)$$

а во втором:

$$\frac{d}{d\tau}(m_0(\tau)U^\alpha) = F^\alpha. \quad (5)$$

Уравнения движения (4) сразу позволяют написать выражение для 4-силы F^α :

$$F^\alpha = \left(\frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right), \quad (6)$$

где \mathbf{F} – трехмерная сила. Это сила Минковского. Для нее автоматически выполняется соотношение $F^\alpha U_\alpha = 0$.

1. Уравнения движения классической электродинамики имеют вид [1]:

$$m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta, \quad (7)$$

где $F^{\alpha\beta}$ – тензор электромагнитного поля:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha. \quad (8)$$

Уравнения (7) вследствие того, что $F^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = 0$, принадлежат к уравнениям типа (4) и вместе с уравнениями поля:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\beta, \quad (9)$$

где j^β – 4-ток, образуют систему уравнений классической электродинамики.

В трехмерных обозначениях уравнения (7) имеют вид

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = q\left(\mathbf{F} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right). \quad (10)$$

Здесь величина m называется массой движущегося тела и дается формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (11)$$

где m_0 – масса покоящегося тела (масса покоя). Мы в дальнейшем ограничимся малыми скоростями, когда $\beta = v/c \ll 1$, так что теперь (10) – это уравнения движения классической механики, а m – ньютонова масса частицы.

2. В [2],[3] нами показано, что в классической электродинамике возможны уравнения движения вида

$$\frac{d}{d\tau}(m_0(\tau)U^\alpha) = \frac{q}{c}\partial^\alpha A^\beta U_\beta. \quad (12)$$

Эти уравнения принадлежат к уравнениям типа (5). Из них после свертки с U_α и с учетом того, что $U^\alpha\partial_\alpha = d/d\tau$, получим

$$\frac{dm_0(\tau)}{d\tau} = -\frac{q}{c}\frac{dA^\beta}{d\tau}U_\beta. \quad (13)$$

Уравнения (12) могут быть записаны в другой форме, а именно:

$$\frac{d}{d\tau}(m_0(\tau)U^\alpha - \frac{q}{c}A^\alpha) = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta. \quad (14)$$

В этой записи правые части уравнений движения (7) и (14) совпадают.

В уравнениях (12) обращает на себя внимание особая роль векторного потенциала. Они содержат кроме тензора электромагнитного поля другие, не сводимые к $F^{\alpha\beta}$, комбинации производных от потенциала. Поэтому в качестве уравнений электромагнитного поля лучше использовать не уравнения (9) для тензора электромагнитного поля, а уравнения Даламбера для векторного потенциала:

$$\square A^\alpha = -\frac{4\pi}{c}j^\alpha \quad (15)$$

с условием Лоренца на него:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (16)$$

Обратимся к трехмерной форме записи уравнения (12). В статическом случае³, когда $\partial_4 = 0$, правая часть уравнения (12) при $\alpha = 4$ равна нулю, и мы сразу получаем

$$\frac{m_0(\tau)}{\sqrt{1-\beta^2}} = m, \quad (17)$$

где m – постоянная интегрирования (трехмерный скаляр), которую мы будем называть ньютоновой или координатной массой частицы. Подставляя соотношение (17) в первые три уравнения системы (12), получим

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (18)$$

или, перенося последнее слагаемое правой части влево:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} - \frac{q}{c}\mathbf{A}) = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}). \quad (19)$$

³Если поле нестационарно, то соотношение (17) также будет иметь место, но только в кулоновской калибровке для потенциала: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Уравнения (18) и (19) – это трехмерные формы записи уравнения (12) и (14).

Теперь надо сравнить уравнения (10) и (18), которые являются трехмерными формами уравнений движения (7) и (12). Они различны. Во-первых, уравнение (18) содержит по сравнению с уравнением (10) новое слагаемое: это дополнительная к силе Лоренца сила

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}. \quad (20)$$

Во-вторых, хотя массы частиц в уравнениях (10) и (18) обозначены одинаково, это тем не менее разные массы, что следует из соотношений (11) и (17). Одинаковы лишь массы покоя m_0 , так что сравнение уравнений движения (10) и (18) возможно лишь в том случае, когда скорости движения частицы в уравнении (10) малы. Таким образом, наша задача теперь состоит в том, чтобы найти эффекты, вызываемые дополнительной силой (20) и дать их физическую интерпретацию. Поскольку эти эффекты относятся только к магнитостатике, то в уравнениях (10), (18) надо положить $\mathbf{E} = 0$, и мы окончательно будем иметь уравнения

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (21)$$

и исследуемые нами уравнения

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}, \quad (22)$$

которые претендуют на более полное по сравнению с уравнениями (21) описание поведения заряженной частицы в стационарном магнитном поле.

1. Переменная собственная масса: физический смысл

Если скорость частицы равна нулю ($\beta = 0$), то из (17) следует, что переменная собственная масса $m_0(\tau)$ совпадает с массой покоя частицы m_0 и равна координатной массе m :

$$m_0(\tau) |_{\beta=0} = m_0 = m. \quad (23)$$

При взаимодействии с полем масса $m_0(\tau)$ частицы меняется и изменение массы (дефект масс) будет согласно (17) иметь вид

$$\Delta m = m_0(\tau) |_{\beta \neq 0} - m_0(\tau) |_{\beta=0} = m_0(\sqrt{1 - \beta^2} - 1) = m(\sqrt{1 - \beta^2} - 1). \quad (24)$$

Отметим еще раз, что масса m_0 здесь выступает и как координатная масса m , поскольку принадлежит системе координат, в которой частица изначально покоилась. Полагая, что скорости невелики, получим из (24):

$$\Delta mc^2 = -\frac{mv^2}{2}. \quad (25)$$

Рассмотрим атом водорода. Уравнения движения электрона в нем

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{q^2}{r^2}. \quad (26)$$

Находя отсюда кинетическую энергию и подставляя ее в (25), получим

$$\Delta mc^2 = -\frac{q^2}{2r}.^4 \quad (27)$$

Для основного состояния электрона правая часть в (27) равна энергии связи и составляет, как известно, $-13,6 \text{ eV}$. Итак, изменение массы электрона в атоме водорода равно энергии связи электрона.

Сделаем два замечания о переменности массы частицы.

1. Согласно (11), инертная масса частицы растет с увеличением скорости и иногда утверждается, что в этом физическая причина того, что частица не может достичь скорости света. Покажем, что соотношение, подобное (11), содержится в (17).

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета, скорости которых v_1 и v_2 . Одна и та же частица в этих двух системах имеет координатные массы m_1 и m_2 , для которых

$$m_0(\tau) = m_1 \sqrt{1 - \beta_1^2} = m_2 \sqrt{1 - \beta_2^2}. \quad (28)$$

Полагая в (28) $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta$, получим

$$m \sqrt{1 - \beta^2} = m_0. \quad (29)$$

Это соотношение имеет вид (11) с той, однако, разницей, что скорость здесь это не скорость частицы, а скорость системы отсчета, т. е. параметр группы Лоренца.

2. Второе замечание относится к физической причине изменения массы частицы. Сама возможность рассмотрения уравнений вида (5), для которых $F^\alpha U_\alpha \neq 0$, содержится в [5] и развивается в [6]. Заключена она в устройстве силы Минковского. Если четвертая компонента этой силы наряду с механической мощностью содержит выделяемую частицей теплоту:

$$F^4 = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + Q}{c \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (30)$$

то из уравнений движения получим [5]

$$\frac{dm_0(\tau)}{dt} = -\frac{Q}{c^2}. \quad (31)$$

⁴Этот результат является возможным ответом на вопрос Бриллюэна [4]: если в теории относительности всякой энергии соответствует масса, то где масса, обусловленная потенциальной энергией?

Теплота здесь положительна (одного знака), т. е. частица только тратит энергию и подобна "небольшой ракете, теряющей массу" [6]. В связи с результатом (31) отметим, что сила в уравнении движения (5), т. е. правая часть в уравнении (12), устроена не по Минковскому.

2. Движение в однородном магнитном поле

Векторный потенциал однородного магнитного поля, каким является поле длинного соленоида, имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (32)$$

Поскольку в (22)

$$\frac{q}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \frac{q}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{2} q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}, \quad (33)$$

то уравнения движения (22) примут вид

$$m \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (34)$$

Это означает, что угловая скорость (круговая частота) движения частицы имеет вид

$$\vec{\omega} = -\frac{q\mathbf{B}}{2mc}. \quad (35)$$

Эта частота называется ларморовой. Такой результат получается из уравнений движения (22), в то время как уравнения движения (21) дают циклотронную частоту вращения частицы

$$\vec{\omega} = -\frac{q\mathbf{B}}{mc}, \quad (36)$$

которая по величине в два раза больше ларморовой частоты. Обсуждение вопроса: какое из выражений правильно ((35) или (36)), является основным содержанием данной работы.

Рассмотрим пример. Пусть магнитное поле соленоида меняется от значения B_1 до значения B_2 . Заряженная частица, двигаясь по окружности радиуса r , меняет свою скорость от значения ω_1 до значения ω_2 . Работа электрического поля по изменению энергии частицы может быть подсчитана по формуле

$$A = \frac{1}{c} \int I d\Phi = mr^2 \int \omega d\omega = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (37)$$

где $I = q\omega/2\pi$, $\Phi = \pi r^2 B$, $d\Phi = \pi r^2 dB$. Представление этой работы как разности кинетических энергий частицы возможно, если в выражении для скорости частицы $v = \omega r$ ее угловая скорость определяется значением (35).

Этот пример будет неполон, если не объяснить причину изменения скорости частицы. Пусть магнитное поле соленоида плавно возрастает от нуля до значения B . Появляющееся при этом электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (38)$$

ускоряет частицу, сообщая ей скорость

$$\mathbf{v} = \int_0^t \frac{q\mathbf{E}}{m} dt = -\frac{q}{mc} \mathbf{A}. \quad (39)$$

Если поле \mathbf{B} однородно и связано с \mathbf{A} выражением (32), то из $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ получим, что угловая скорость частицы дается выражением (35).

Приведенный здесь пример свидетельствует в пользу выражения (35) для угловой скорости частицы.

3. Движение вне соленоида. Закон сохранения обобщенного импульса

Векторный потенциал вне длинного соленоида радиуса R имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (40)$$

Отсюда следует, что вне соленоида $\mathbf{B} = 0$, а уравнения движения частицы вне соленоида:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \quad (41)$$

Решать уравнение (41) нет необходимости, поскольку вторая его форма

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v} - \frac{q}{c} \mathbf{A}) = 0 \quad (42)$$

сразу дает закон сохранения обобщенного импульса:

$$m\mathbf{v} - \frac{q}{c} \mathbf{A} = \mathbf{P}_0, \quad (43)$$

где постоянная интегрирования $\mathbf{P}_0 = m\mathbf{v}_0 - q/c\mathbf{A}_0$. При движении по окружности $\mathbf{P}_0 = 0$, и из (43) с учетом выражения для потенциала (40) получаем угловую скорость вращения частицы по окружности:

$$\vec{\Omega} = -\frac{R^2}{r^2} \vec{\omega}, \quad (44)$$

где $\vec{\omega}$ дается выражением (35). Знак "минус" в (44) показывает, что частица вне и внутри соленоида вращается в противоположных направлениях. Другие траектории, описываемые законом сохранения (43) при различных значениях постоянной интегрирования \mathbf{P}_0 , рассмотрены нами в [7], [8].

Подставляя выражение для потенциала (40) в правую часть уравнения (41), непосредственным вычислением убеждается, что сила, управляющая движением частицы вне соленоида, имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{q\Phi}{2\pi c r^2} [(\mathbf{k} \times \mathbf{v}) - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{r})], \quad (45)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{B}/B$, $\Phi = B\pi R^2$ – поток внутри соленоида. При движении по окружности из (45) получим

$$\mathbf{F} = -\frac{q}{2c} \frac{R^2}{r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (46)$$

Активное поведение заряженных частиц в области вне соленоида известно. Оно не укладывается в законы обычной классической электродинамики (электродинамики с уравнениями движения (7)). Мы сейчас такие примеры рассмотрим и попытаемся их объяснить, исходя из уравнения (12) или в данном случае из уравнения (22).

1. Решение уравнения Шредингера для круговых орбит электрона, концентрических длинному тонкому соленоиду с потоком Φ , приводит к собственным значениям энергии электрона

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar c} \right)^2, \quad (47)$$

где m – масса электрона, r – радиус орбиты, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ [9]. Отсюда получим с учетом (35) и (44) при $n = 0$

$$\frac{q^2\Phi^2}{8\pi^2 c^2 m r^2} = \frac{m r^2}{2} \Omega^2. \quad (48)$$

Это значение полной энергии частицы совпадает с ее кинетической энергией, если угловая скорость в (48) дается выражением (44).

2. В [10] приведен следующий опыт. Длинный соленоид, несущий поток Φ , охвачен круговым витком. Если виток понижением температуры переводится в сверхпроводящее состояние, то в нем возникает ток. Напротив, если температура повышается и виток возвращается в исходное состояние, ток прекращается.

Будем считать, что виток в сверхпроводящем состоянии является идеальным проводником, тогда из (43) при $\mathbf{P}_0 = 0$ получим

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{nq^2}{mc} \mathbf{A}. \quad (49)$$

Это выражение для тока сверхпроводимости только знаком отличается от известной формулы Лондонов.

3. Векторный потенциал на оси тонкого тороидального соленоида имеет вид

$$A(z) = \frac{\Phi}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-3/2}, \quad (50)$$

где Φ – поток соленоида, R – большой радиус тороида. Скорость частицы, движущейся по оси такого соленоида, согласно (43) меняется по закону

$$v_z = v_0 + \alpha \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-3/2}, \quad (51)$$

где v_0 – скорость частицы на бесконечности, $\alpha = q\Phi/2cmR$. Если на электроннолучевую трубку в том месте, где расположены отклоняющие пластины, надеть тороид, то он будет менять положение на экране отклоненного пластинами электронного луча. Предполагая, что смещение луча в пределах пластины невелико, получим

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{1}{(1 - \alpha/v_0)^2}, \quad (52)$$

где Δ_0 – отклонение луча пластинами при выключенном тороиде ($\Phi = 0$), Δ – отклонение луча пластинами при включенном тороиде ($\Phi \neq 0$). Отметим, что Δ может быть как больше, так и меньше Δ_0 , т.е. это отношение зависит от направления потока в тороиде. Опыт показал удовлетворительное совпадение с формулой (52) [11].

Приведенные выше опыты мы объяснили с помощью уравнений движения (22). Особенность этих опытов в том, что они имеют дело с областями пространства, где магнитное поле равно нулю, но не равен нулю векторный потенциал. По этой причине их мы относим к эффектам векторного потенциала [8]. Самым знаменитым из них является эффект Аронова–Бома.

4. Эффект Аронова – Бома

Если в двухщелевом эксперименте по дифракции электронов между щелями поместить соленоид с потоком Φ , то интерференционная картина сдвигается на фазу

$$\Delta\varphi = \frac{q\Phi}{\hbar c}. \quad (53)$$

Это эффект Аронова – Бома [12]. Наше объяснение сдвига интерференционной картины основывается на уравнении движения (22), а физическая картина явления та же, что и в работе [13].

Электроны, вылетая с некоторой скоростью из точки P , прежде чем достичь точки Q экрана, огибают соленоид, проходя через щель 1 по траектории $P1Q(l_1)$ и щель 2 по траектории $P2Q(l_2)$. Для каждой из этих траекторий справедлив закон сохранения (43), так что мы можем записать

$$m\mathbf{v}_1 - \frac{q}{c}\mathbf{A}_1 = m\mathbf{v}_2 - \frac{q}{c}\mathbf{A}_2. \quad (54)$$

Проинтегрируем это уравнение по траекториям движения электронов. Поскольку каждая из сторон в (54) равна постоянному вектору \mathbf{P}_0 , то результат интегрирования зависит только от пределов интегрирования, и мы можем записать

$$mv \int_{l_1} \mathbf{v}_1 \cdot d\vec{\tau}_1 - \frac{q}{c} \int_{l_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{L}_1 = mv \int_{l_2} \mathbf{v}_2 \cdot d\vec{\tau}_2 - \frac{q}{c} \int_{l_2} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{L}_2, \quad (55)$$

где $d\vec{\tau} = d\mathbf{L}/v$. Величина

$$\int_{l_1} \mathbf{v}_1 \cdot d\vec{\tau}_1 - \int_{l_2} \mathbf{v}_2 \cdot d\vec{\tau}_2 = v\Delta\tau = \Delta l \quad (56)$$

может быть названа геометрической разностью хода когерентных электронов, а

$$\int_P^Q \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{L}_1 - \int_P^Q \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{L}_2 = \int_P^Q \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{L}_1 + \int_Q^P \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{L}_2 = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \Phi, \quad (57)$$

где Φ – поток магнитного поля соленоида. Итак, выражение (55) может быть переписано в виде

$$mv\Delta l = \frac{q}{c}\Phi. \quad (58)$$

Вводя сюда выражение для длины волны де Бройля $\lambda = h/(mv)$ и учитывая, что $\Delta l/\lambda = \Delta\Phi/(2\pi)$, получим соотношение (53). Более строгий вывод геометрической разности хода Δl из (56) приведен в [7].

5. О законе взаимодействия элементарных токов

На элементарный ток $I d\mathbf{L}$ в магнитном поле согласно уравнению движения (21) действует сила Ампера

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (59)$$

Поскольку магнитное поле элементарного тока определяется законом Био – Савара

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (60)$$

то можно найти силу взаимодействия двух элементарных токов $I_1 d\mathbf{L}_1$ и $I_2 d\mathbf{L}_2$ (ток $I_1 d\mathbf{L}_1$ создает поле):

$$d^2\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c} I_2 d\mathbf{L}_2 \times d\mathbf{B}_1 = \frac{1}{c^2} I_1 I_2 d\mathbf{L}_2 \times (d\mathbf{L}_1 \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}). \quad (61)$$

После интегрирования этого выражения получаем силу взаимодействия двух токовых контуров [14]:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c^2} I_1 I_2 \oint \oint (d\mathbf{L}_1 \cdot d\mathbf{L}_2) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (62)$$

Закон (62) удовлетворяет третьему закону Ньютона ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$), но выражение (61) для силы взаимодействия двух элементарных токов этому закону не удовлетворяет:

$$d^2\mathbf{F}_{12} \neq d^2\mathbf{F}_{21}. \quad (63)$$

Интерес к нарушению (63) третьего закона Ньютона обострился вследствие попыток дать физическую интерпретацию эффекту Аронова – Бомма. Если этот эффект понимается как локальное взаимодействие частицы с полем, то нарушение (63) означает "longstanding physical problem" [15], [16]⁵. Если же этот эффект есть чисто квантовое явление, то нарушение

⁵Интересно отметить, что оригинальный закон Ампера (1823 г.) [14] удовлетворяет третьему закону Ньютона.

не имеет физического смысла, поскольку приводящий к нему закон (61) имеет полевое происхождение⁶.

Обратимся теперь к уравнениям движения (22). Сила, действующая со стороны поля на заряд dq , согласно этому уравнению имеет вид:

$$d\mathbf{F} = dq \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{dq}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \quad (64)$$

Полагая здесь

$$dq = I dt, \quad \mathbf{v} dt = d\mathbf{L}, \quad (65)$$

где I – ток в проводнике, $d\mathbf{L}$ – элемент длины проводника, получим из (64) выражение для силы, действующей на элементарный ток со стороны магнитного поля:

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} + \frac{1}{c} (I d\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \quad (66)$$

Этот закон отличается от закона (59) наличием силы, которую мы будем называть дополнительной к силе Ампера (complementary force):

$$d\mathbf{F}_{Com.} = \frac{1}{c} (I d\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \quad (67)$$

Поскольку элементарный ток не зависит от полевых координат, то выражение (66) может быть переписано в виде

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \nabla (I d\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}). \quad (68)$$

Рассмотрим теперь два элементарных тока: $I_1 d\mathbf{L}_1$ и $I_2 d\mathbf{L}_2$. Сила $d^2\mathbf{F}_{12}$, действующая на второй ток со стороны первого, согласно (68) имеет вид

$$d^2\mathbf{F}_{12} = \frac{I_2}{c} \nabla_1 (d\mathbf{L}_2 \cdot d\mathbf{A}_1), \quad (69)$$

где $d\mathbf{A}_1$ – векторный потенциал создаваемый элементарным током $I_1 d\mathbf{L}_1$. Поскольку

$$d\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{I d\mathbf{L}}{r}, \quad (70)$$

то выражение (69) примет вид

$$d^2\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c} \nabla_1 \left(\frac{d\mathbf{L}_2 \cdot d\mathbf{L}_1}{r_{12}} \right), \quad (71)$$

где $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ – расстояние между элементарными токами. Аналогично запишется выражение для силы, действующей на первый ток со стороны второго:

$$d^2\mathbf{F}_{21} = \frac{I_1 I_2}{c} \nabla_2 \left(\frac{d\mathbf{L}_1 \cdot d\mathbf{L}_2}{r_{21}} \right). \quad (72)$$

⁶ «Требование от закона взаимодействия элементарных токов равенства действия и противодействия было общим заблуждением, свойственным физикам домаксвелловской эпохи» [17].

Поскольку $r_{12} = r_{21}$, а $\nabla_1(1/r_{12}) = -\nabla_2(1/r_{21})$, то сравнение выражений (72) и (71) дает

$$d^2\mathbf{F}_{21} = -d^2\mathbf{F}_{12}, \quad (73)$$

т. е. третий закон Ньютона выполняется уже для элементарных токов. Это важный результат, поскольку получен он в полевой трактовке взаимодействия.

6. Дополнительная сила. Вращение рамки с током вне соленоида

Выражение (66) для силы взаимодействия магнитного поля и тока кроме силы Ампера содержит силу (67), которую мы назвали дополнительной силой. Для нее⁷

$$\oint_1 d\mathbf{F}_{Com.} = 0, \quad (74)$$

т. е. она не меняет силу, действующую со стороны магнитного поля на замкнутый контур. Она имеет произвольное направление и может быть обнаружена на участках контура как сила деформации⁸. Иногда она выступает как продольная сила. Интересно отметить, что первый эксперимент по обнаружению продольной силы был поставлен Ампером [20]. К настоящему времени накоплен обширный экспериментальный и теоретический материал, который нуждается в понятии «продольная сила» (см., например, [21])⁹.

Дополнительная сила меняет распределение сил в контуре и может привести к изменению механического момента, действующего на контур со стороны поля. Интересную возможность для проявления силы (67) дает область вне соленоида, где $\mathbf{B} = 0$, но $\mathbf{A} \neq 0$. Момент сил, действующий на контур в этой области

$$\mathbf{M} = \oint_1 \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_{Com.} = \frac{I}{c} \oint_1 \mathbf{r} \times (d\mathbf{L} \cdot \nabla) \vec{A} = \frac{I}{c} \oint_1 (d\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{r} \times \mathbf{A} + \frac{I}{c} \oint_1 \mathbf{A} \times d\mathbf{L}. \quad (75)$$

Первое слагаемое здесь по теореме Стокса исчезает, и мы имеем

$$\mathbf{M} = \frac{I}{c} \oint_1 \mathbf{A} \times d\mathbf{L}. \quad (76)$$

⁷В самом деле в (67) $(d\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{A} = d\mathbf{A}$, так что $\int_1^2 (d\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$.

⁸Предположение о том, что сила в магнетостатике токов потенциальна, имеет серьезные основания. Исходя из этого в [18] получены выражения для сил и моментов, действующих между токовыми системами. Следствием этого предположения также является и выражение для дополнительной силы (67). «Экспериментальные исследования этих сил, проведенные в Новочеркасском политехническом институте, дают неоспоримые доказательства их существования» [19].

⁹По нашему мнению, продольная сила действует на движущиеся металлические проводники, когда ток в проводнике создается не только электронами проводимости, но и ионами кристаллической решетки, через которые и передается усилие.

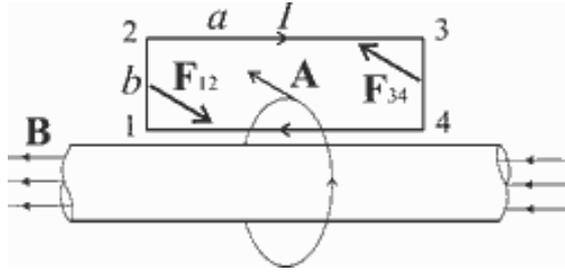


Рис. 1. На рамку с током вне длинного соленоида действует момент сил

Рассмотрим пример. Снаружи длинного соленоида с потоком Φ находится прямоугольный токовый контур со сторонами a и b . Сторона a параллельна оси соленоида, сторона b – радиальна (рис. 1). Найдём силы, действующие на отдельные участки контура. Поскольку векторный потенциал имеет только угловую компоненту

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi r}, \quad (77)$$

то согласно (67) сила F_{12} , действующая на участок 12 контура, равна

$$F_{12} = \int_r^{r+b} dF_{12} = \frac{I}{c} \int_r^{r+b} \left(dr \cdot \frac{d}{dr} \right) \frac{\Phi}{2\pi r} = \frac{I\Phi}{2\pi c} \left(\frac{1}{r+b} - \frac{1}{r} \right). \quad (78)$$

Эта сила перпендикулярна участку 12 и направлена противоположно векторному потенциалу. Аналогично получим $F_{34} = -F_{12}$, а поскольку $F_{23} = F_{41} = 0$, то момент сил, действующий на рамку, равен:

$$M = \frac{I\Phi}{2\pi c} \frac{ab}{r(r+b)}. \quad (79)$$

Это выражение для момента находится в полном согласии с его выражением (76).

7. Выводы. Дополнения

Ответ на вопрос о том, какое из выражений для угловой скорости вращения частицы в однородном магнитном поле является правильным ((35) или (36)), уже содержится в общефизическом законе (37) для работы по изменению механической энергии частицы: правильным является результат (35) (ларморова частота), а результат (36) (циклотронная частота) неверен. Ясен и механизм уменьшения вдвое угловой скорости вращения ((35) вместо (36)), который состоит в действии дополнительной силы $(q/c)(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$: если сила Лоренца вращает частицу в одном направлении со скоростью (36), то дополнительная сила вращает ее в обратном направлении со скоростью вдвое меньшей, чем (36) (это видно из выражения (33)), и в результате получается вращение со скоростью (35). Далее нами рассмотрено несколько физических эффектов, которые могут быть объяснены действием дополнительной силы. Их мы условно назвали эффектами

векторного потенциала [6]. Самым известным из них является, как мы уже упоминали, эффект Аронова – Бома. Тем не менее вопрос о справедливости уравнений движения (22) остается и состоит теперь он в том, почему неправильный с нашей точки зрения результат (36) воспринимается как правильный. Для выяснения этого обстоятельства нужно обратиться к вопросу о способах измерения силовой (пондеромоторной) характеристики магнитного поля.

Известно, что на токовый контур с магнитным моментом $\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n}$ в однородном магнитном поле \mathbf{B} действует механический момент

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (80)$$

Этот момент создает сила Ампера (59). Проиллюстрируем это положение для сил (59) и (66), выбрав токовый контур в виде прямоугольной рамки со сторонами a и b (сторона b параллельна магнитному полю). Момент, создаваемый силами Ампера (они действуют на стороны a), равен

$$M = \frac{I}{c} abB. \quad (81)$$

Найдем теперь момент, создаваемый дополнительной силой (67). Для потенциала (32), как легко показать, получим

$$M = -\frac{1}{2} \frac{I}{c} abB. \quad (82)$$

Складывая значения момента (81) и (82), получим момент силы (66):

$$M = \frac{1}{2} \frac{I}{c} abB, \quad (83)$$

и он в два раза меньше, чем момент силы (59). Таким образом, если прибором, действие которого основано на повороте рамки с током в магнитном поле, измерять магнитное поле, то толкование этого измерения зависит от нас: это B , если сила, действующая на рамку, дается выражением (59) или это $B/2$, если такая сила дается выражением (66). По этой причине оба результата ((36) и (35)) могут считаться правильными.

Если мы утверждаем, что уравнения движения (21) неверны, а верны уравнения (22), то надо найти способ определения величины \mathbf{B} , исходя из выражения для силы (66). Такая возможность есть. Если взять два длинных параллельных проводника с токами I_0 и I , то дополнительная сила (67), действующая на элементарный ток $I d\mathbf{L}$ со стороны тока I_0 , равна нулю. По силе (а это только сила Ампера), действующей на подвижный участок тока $I \Delta l$, можно определить индукцию магнитного поля B_0 , создаваемую током I_0 :

$$\Delta F = \frac{I}{c} \Delta l B_0. \quad (84)$$

В этом опыте (и только в нем) законы (59) и (66) дают один и тот же результат.

Дополнение 1. Выше мы отмечали, что дополнительная сила (67), действующая на участках токового контура, может быть направлена как угодно. Наибольший интерес вызывают, однако, те случаи, когда она подобно силе Ампера перпендикулярна участку контура. Дополнительную силу (67), действующую на участке контура, удобно представить в виде (см. сноску 8)

$$\mathbf{F}_{Com.} = \frac{I}{c} \Delta \mathbf{A}, \quad (85)$$

где $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$.

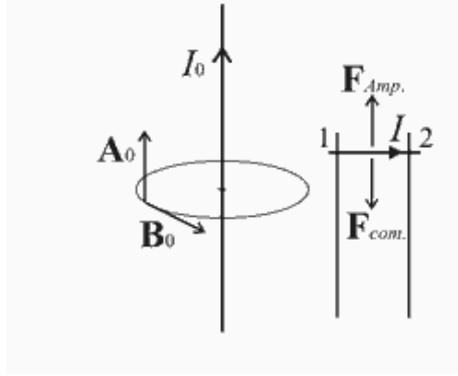


Рис. 2. На токовую перемычку в поле прямого тока действует кроме силы Ампера (вверх) равная ей дополнительная сила (вниз)

Рассмотрим пример. В поле прямого тока I_0 находится прямоугольная рамка, образуемая двумя параллельными токами и соединяющей их перемычкой 12 длиной b (нижняя сторона рамки не показана) (Рис. 2). Стороны рамки параллельны проводу, перемычка радиальна. По перемычке течет ток I . Рассмотрим силы, которые действуют на подвижную сторону рамки (перемычку 12). Поскольку магнитное поле прямого тока имеет только угловую компоненту $B_{0\phi} = 2I_0/(cr)$, то сила Ампера равна

$$F_{12A} = \frac{I}{c} \int_{r_0}^{r_0+b} \frac{2I_0}{cr} dr = \frac{2I_0 I}{c^2} \ln \frac{r_0 + b}{r_0}, \quad (86)$$

где r_0 – расстояние от тока I_0 до ближайшей к нему стороны рамки. Эта сила направлена вверх. Векторный потенциал поля прямого тока направлен по току и равен $A = (2I_0/c) \ln(R/r)$. Поэтому дополнительная сила согласно (85) равна

$$F_{12Com.} = \frac{I}{c} \frac{2I_0}{c} \left(\ln \frac{R}{r_0 + b} - \ln \frac{R}{r_0} \right) = \frac{2I_0 I}{c^2} \ln \frac{r_0}{r_0 + b} \quad (87)$$

и направлена вниз.

Таким образом, сила Ампера и дополнительная сила, действующие на перемычку, уравновешивают друг друга. Этот результат можно было предвидеть, если обратиться к соотношению (68). В нем выражение

$$dU = -\frac{1}{c} (I d\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}) \quad (88)$$

можно назвать потенциальной энергией элементарного тока, так что выражение (68) может быть записано в виде

$$d\mathbf{F} = -\nabla dU. \quad (89)$$

В нашем случае потенциальная энергия взаимодействия тока I_0 и перемычки равна нулю и не меняется при смещении перемычки в направлении тока. Это и означает, что полная сила, действующая на перемычку, равна нулю.

Дополнение 2. Источником магнитного поля в магнитостатике является электрический ток. Это находит свое отражение в теореме о циркуляции вектора магнитной индукции:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (90)$$

Интересно отметить аналогию между этим законом и определением потока вектора магнитной индукции:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \Phi. \quad (91)$$

Эта аналогия позволяет определить векторный потенциал линейных потоковых (Φ) конфигураций по индукции магнитного поля соответствующих токовых (I) конфигураций. Для этого достаточно сделать замену

$$\frac{4\pi}{c} I \rightarrow \Phi. \quad (92)$$

Так, из выражения для индукции магнитного поля на оси кругового тока

$$B_z = \frac{2\pi I}{cR} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} \quad (93)$$

получаем посредством замены (92) выражение (50) для векторного потенциала на оси тороида. Аналогично могут быть получены выражения (32) и (40) для векторного потенциала внутри и вне прямого соленоида по выражениям для индукции магнитного поля внутри и вне прямого тока.

Кроме обычного $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ представление индукции магнитного поля иногда используется (см., например [14]) другое представление¹⁰, а именно

$$\mathbf{B} = \nabla\Psi, \quad (94)$$

где Ψ – скалярный магнитный потенциал:

$$\Psi = \frac{I}{c}\Omega. \quad (95)$$

¹⁰Представление $\mathbf{A} = \text{rot}\mathbf{G}$, где \mathbf{G} – векторный суперпотенциал, также может быть использовано для выполнения соотношения (91) [8].

Здесь Ω – телесный угол, под которым наблюдается поверхность, натянутая на линейный ток. Телесный угол терпит разрыв $\pm 4\pi$ при переходе через эту поверхность, тем самым обеспечивая выполнение закона (90). Эта предосторожность при рассмотрении скалярного магнитного потенциала известна как топология вихревого магнитного поля [14].

Скалярный потенциал для векторного потенциала (здесь уместно использование термина «суперпотенциал») вводится по аналогии с соотношением (94):

$$\mathbf{A} = \nabla\chi, \quad (96)$$

где χ в соответствии с заменой (92) равно

$$\chi = \frac{\Phi}{4\pi}\Omega. \quad (97)$$

Так, скалярный потенциал поля прямого тока определяется многозначной функцией

$$\Psi = \frac{2I}{c}\varphi. \quad (98)$$

Отсюда получим, что $B_\varphi = d\Psi/rd\varphi = 2I/cr$. Аналогично скалярный суперпотенциал поля прямого соленоида запишется в виде

$$\chi = \frac{\Phi}{2\pi}\varphi. \quad (99)$$

Отсюда получаются выражения (32) и соответственно (40) для векторного потенциала магнитного поля прямого соленоида. Следует отметить, что находимый таким образом векторный потенциал подчинен кулоновской калибровке: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Выражения (94) и (96) уравнивают математические свойства величин \mathbf{V} и \mathbf{A} , а уравнения движения (22) наделяют векторный потенциал необходимыми свойствами физической величины, которых он лишен в уравнении движения (21).

Отметим особо, что меняется и смысл соотношения (91). Теперь это не определение потока вектора магнитной индукции, а, подобно (90), теорема о циркуляции векторного потенциала. Таким образом, между соотношениями (90) и (91) имеется не только математическая, но и физическая аналогия. Это приводит к глубоким физическим следствиям. Пусть, например, векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0). \quad (100)$$

Магнитное поле, отвечающее этому потенциалу, направлено по оси z : $\mathbf{V} = (0, 0, B)$ и на частицу, движущуюся со скоростью v по оси x , действует сила Лоренца. Это допустимый потенциал для уравнений (21): в однородном магнитном поле частица движется по окружности. Если же потенциал (100) подставить в уравнения движения (22), то правая часть их при скорости $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ равна нулю. Отсюда можно сделать вывод, что уравнения (22) неверны. Мы, однако, утверждаем обратное, и такое

утверждение возможно, потому что меняется смысл соотношения (91): из определения потока оно становится законом о циркуляции векторного потенциала, как этого требуют уравнения движения (22). Выше мы говорили о том, что всякой токовой (I) конфигурации соответствует потоковая (Φ) конфигурация. Потому наше утверждение о том, что потенциал (100) нефизичен (нельзя реализовать) означает, что нефизичным является и магнитное поле вида

$$\mathbf{V} = (0, (4\pi/c)jx, 0), \quad (101)$$

так как порождается неограниченным распределением однородного тока: $\mathbf{j} = (0, 0, j)$.

8. Обсуждение результатов

Обсудим общие положения, связанные с самой возможностью рассмотрения в электродинамике уравнений движения с переменной собственной массой частицы и отметим затруднения, возникающие при таком рассмотрении [2, 3].

1. Вариационный принцип. Известно, что уравнения движения можно трактовать как закон сохранения энергии и импульса системы, состоящей из вещества и поля. Отсюда получается, что плотность правой части уравнений движения (плотность силы) может быть представлена в виде

$$f^\alpha = -\partial_\beta T^{\alpha\beta}, \quad (102)$$

где f^α – плотность силы, а $T^{\alpha\beta}$ – тензор энергии импульса электромагнитного поля, который получается из лагранжиана электромагнитного поля. Для уравнений движения (7) такой лагранжиан имеет вид [1]

$$L = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (103)$$

где $F_{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля, а соответствующий выражению (103) тензор-импульса имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (F^{\alpha\nu} F_\nu^\beta + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}). \quad (104)$$

Плотность силы в уравнениях движения (12) получается в соответствии со (102) из тензора энергии-импульса

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \partial^\alpha A^\nu \partial^\beta A_\nu + g^{\alpha\beta} L, \quad (105)$$

который, в свою очередь, выводится из лагранжиана [22, 23]:

$$L = -\frac{1}{8\pi} \partial^\alpha A^\nu \partial_\alpha A_\nu. \quad (106)$$

Лагранжиан (103) иногда называют поперечным, а лагранжиан (106) – продольным. Продольный лагранжиан сводится к поперечному (вплоть до

членов типа дивергенции), если на него наложить условие Лоренца (16). Этого нельзя сказать о получаемых из них тензорах энергии-импульса: выражение (105) при наложении условия Лоренца не сводится к выражению (104), т. е. не может быть в общем случае выражен только через компоненты электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . В этом состоит одна из проблем, возникающих при физической интерпретации отдельных компонент тензора (105). Попытки ее решения содержатся в наших работах [7, 23].

2. Калибровочная инвариантность. Преобразования, при которых

$$A^\alpha \longrightarrow A^{\alpha'} = A^\alpha + \partial^\alpha f, \quad (107)$$

где f – произвольная гладкая функция, называются калибровочными. Лагранжиан (103) равно как и уравнения движения (7), инвариантны относительно калибровочных преобразований. Иначе обстоит дело с лагранжианом (106). При преобразованиях (107)

$$L \rightarrow L' = L + \frac{1}{8\pi} [2\partial_\alpha (A^\beta \partial^\alpha \partial^\beta f) - 2A^\beta \partial_\beta \square f + \partial^\alpha (\partial^\beta f \partial_\alpha \partial_\beta f) - \partial_\beta f \partial^\beta \square f]. \quad (108)$$

Если на калибровочную функцию наложить условие

$$\square f = 0, \quad (109)$$

то инвариантом преобразований (107) будет действие

$$s = \int L d^4x, \quad (110)$$

поскольку слагаемое вида дивергенций при интегрировании по 4-объему исчезают.

Пусть потенциал в уравнениях движения (12) имеет вид

$$A^\alpha = \partial^\alpha f. \quad (111)$$

Тогда из (14) получим

$$m_0(\tau)U^\alpha - \frac{q}{c}\partial^\alpha f = C^\alpha, \quad (112)$$

где C^α – постоянная интегрирования. Дивергенция уравнения (112) с учетом того, что $U^\alpha \partial_\alpha = d/d\tau$, а также уравнений непрерывности для линий тока [6]

$$\partial_\beta U^\beta = 0 \quad (113)$$

приводит к соотношению

$$\frac{dm_0(\tau)}{d\tau} = \frac{q}{c}\square f. \quad (114)$$

Таким образом, если калибровочная функция подчиняется уравнению (109), то действие (110) с лагранжианом (106) и уравнения движения (12)

инвариантны относительно таких преобразований. Это так называемые специализированные калибровочные преобразования.

Особый интерес теперь представляют потенциалы вида (111), в которых функция f подчиняется уравнению

$$\square f = \Lambda. \quad (115)$$

В этом случае согласно (114) собственная масса частицы меняется и по нашим представлениям взаимодействует с полем, но его, по-видимому, нельзя назвать электромагнитным. Потенциалы вида (111) рассматривались нами в работе [24]¹¹. Нетрудно получить уравнение на функцию Λ в уравнении (115). Из уравнения (15) с учетом уравнений (111) и (115) и требования выполнения закона сохранения электрического заряда

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \quad (116)$$

получим

$$\square \Lambda = 0. \quad (117)$$

Обратим внимание на то, что для потенциалов вида (111) с условием (115) не выполняется условие Лоренца:

$$\partial_\alpha A^\alpha = \Lambda. \quad (118)$$

Это еще раз подчеркивает, что потенциалы вида (111) с условием (115), допускаемые уравнениями движения (12), расширяют то понятие электромагнитного поля, которое связывается с уравнениями движения (7).

3. Электромагнитная вязкость. Пусть частица движется в постоянном электрическом поле. Тогда ее уравнение движения имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} \quad (119)$$

и получается из (18) при $\mathbf{V} = 0$ и $\mathbf{A} = 0$. Особенность уравнений (119) состоит в том, что они допускают движение частицы с любой скоростью. Это классические уравнения движения ньютоновской механики, т.е. плохой физический результат для релятивистских уравнений движения (12). Положение можно исправить, если воспользоваться потенциалами вида (111). Поскольку в нашем случае функция f из (115) подчиняется стационарному однородному (поле E направлено по оси x) уравнению $d^2 f/dx^2 = \Lambda$, то, полагая $\Lambda = \text{const}$, получим согласно (111): $\mathbf{A} = \Lambda x \mathbf{i} + \mathbf{A}_0$. Подставляя этот потенциал в уравнение движения (18), получим вместо (119) уравнение

$$m\dot{v} = qE + \frac{q\Lambda}{c}v. \quad (120)$$

Решение этого уравнения при $\Lambda = -E$ имеет вид

$$\frac{v}{c} = 1 - \exp(-\alpha t), \quad (121)$$

¹¹К ним, например, принадлежит потенциал вида $\mathbf{A} = \lambda \nabla(q/r)$, где λ – постоянная, имеющая размерность длины. С этим потенциалом в [8] связывается новое взаимодействие.

где $\alpha = qE/mc$. Это выражение для скорости частицы имеет своим верхним пределом скорость света, а при малых скоростях совпадает с решением уравнения (119). Следует отметить, что решение (121) мало отличается от решения уравнения (7)

$$\frac{v}{c} = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}, \quad (122)$$

где $\alpha = qE/m_0c$, для движения релятивистской частицы в однородном электрическом поле.

Нахождение функции Λ является следующей проблемой, возникающей при физической интерпретации этой величины, которую мы в соответствии с устройством уравнения (120) называем электромагнитной вязкостью. Можно предположить, что функция Λ зависит от силовых характеристик электромагнитного поля: $\Lambda(\mathbf{E}, \mathbf{V})$. Так, в [24] нами рассмотрена задача о движении частицы в однородном магнитном поле. Оказалось, что при $\Lambda = -B$ траекторией частицы является скручивающаяся логарифмическая спираль. Некоторые соображения об общем виде функции Λ приведены нами в работе [3].

4. Переменная собственная масса. Проинтегрировав уравнение (13), получим

$$m_0(\tau) = m_0 - \frac{q}{c} A^\beta U_\beta + \frac{q}{c} \int A^\beta \frac{dU_\beta}{d\tau} d\tau. \quad (123)$$

Здесь $m_0(\tau)$ – переменная собственная масса частицы. Состоит она из трех слагаемых. Первое слагаемое m_0 – масса невзаимодействующей с полем частицы. Она входит в уравнения движения (7) и в соответствии с соотношением (11) может быть названа массой покоя частицы. Второе слагаемое в (123) интерпретируется как изменение массы частицы, обязанное ее взаимодействию с полем (дефект массы). Так в разобранный нами примере показано на соотношении (27), что связанный в атоме водорода электрон на 13,6 eV «легче» свободного электрона. И, наконец, последнее слагаемое в (123): его интерпретация затруднительна.

Мы рассмотрели в классической электродинамике уравнения движения для частицы с переменной собственной массой. По нашему мнению, с этим уравнением могут быть связаны интересные физические решения.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М. : Наука, 1967. 460 с.
2. Солунин А. М. О ларморовой и циклотронной частотах // Математика и ее приложения : журн. Иван. мат. о-ва. 2009. Вып. 1(6). С. 103 – 120.
3. Солунин А. М. Об уравнениях движения в электродинамике // Физическая мысль России. 1996. 3/4. С. 124 – 134.
4. Бриллюэн Л. Новый взгляд на теорию относительности. М. : Мир. 1971. 142 с.
5. Паули В. Теория относительности. М. : Наука. 1983. 336 с.
6. Меллер К. Теория относительности. М. : Атомиздат. 1973. 400 с.
7. Солунин А. М. R-электродинамика / Иван. гос. ун-т. Иваново, 1983. 39 с. Деп. в ВИНТИ 20.07.82, № 3908.

8. Солунин А. М. R -электродинамика и эффекты векторного потенциала / Иван. гос. ун-т. Иваново, 1985. 63 с. Деп. в ВИНТИ 25.07.85, № 5416.
9. Merzbacher E. On magnetic rotator // Am. J. Phys. Vol. 30. 1962. P. 237 – 247.
10. Deaver Jr. D. S., Donaldson G. B. An experimental demonstration of winding number dependence of the Aharonov–Bohm effect // Phys. Lett. A. Vol. 89, № 4. 1982. P. 178 – 180.
11. Солунин А. М., Костин А. В. Об эффекте векторного потенциала для тороидального соленоида / Иван. гос. ун-т. Иваново, 1984. 18 с. Деп. в ВИНТИ 11.12.84, № 7900.
12. Aharonov Y., Bohm D. Significance of electromagnetic potentials in quantum theory // Phys. Rev. 1959. Vol. 115. P. 485 – 491.
13. Boyer T. H. Classical electromagnetic deflection and lag effects associated with quantum interference pattern shifts: considerations related to the Aharonov–Bohm effect // Phys. Rev. D. 1973. Vol. 8. P. 1679 – 1693.
14. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М. : ГИТТЛ, 1954. 620 с. С. 207.
15. Leibowitz B. Significance of the Aharonov–Bohm effect // Nuovo Cim. 1965. Vol. 38. P. 932 – 950.
16. Trammel G. T. Aharonov–Bohm paradox // Phys. Rev. B. 1964. Vol. 134. P. 1183 – 1184.
17. Шапиро И. С. О роли векторного потенциала в классической электродинамике // УФН. 1972. Т. 108, вып. 2. С. 319.
18. Синельников Е. М., Синельников Д. Е. Пондеромоторное взаимодействие двух элементарных тел в квазистационарном магнитном поле // Электромеханика. 1976. № 1. С. 13 – 18.
19. Синельников Д. Е. Замечания по поводу статьи В. Г. Алешинского «К вопросу о формуле электродинамического взаимодействия токовых элементов» // Электромеханика. 1978. № 3. С. 434 – 435.
20. Pappas P. T. The original Ampere Force and Biot–Savart and Lorentz Forces // Nuovo Cim. B. 1983. Vol. 76, № 2. P. 189 – 197.
21. Graneau P. Ampere and Lorentz Forces // Phys. Lett. A. 1985. Vol. 107, № 5. P. 235 – 237.
22. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. М. : Наука, 1980. 319 с.
23. Солунин А. М. Электродинамика с симметричным тензором электромагнитного поля (R -электродинамика) / Иван. гос. ун-т. Иваново, 1981. 15 с. Деп. в ВИНТИ, № 3728.
24. Солунин А. М. О роли калибровочных преобразований в R -электродинамике / Иван. гос. ун-т. Иваново, 1982. 25 с. Деп. в ВИНТИ 29.01.82, № 393.

Поступила в редакцию 28.06.2012.