Математика и ее приложения : ЖИМО. 2012. Вып. 1 (9). С. 15–24

УДК 517.954

А. С. Волкова[1]

Об управлении дифференциальной системой в классе обобщенных решений на графе

Ключевые слова: обобщенное решение, теорема единственности, граничное управление.

Рассматривается обобщенное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности на графе, при этом указывается функциональное пространство, в котором предполагается отыскание обобщенного решения, с сохранением теоремы единственности.

Key words: generalized solution, the uniqueness theorem, boundary control.

We consider the generalized solution of the boundary problem for the heat equation on a graph by specifying the functional space in which you intend to search for a generalized solution, preserving the uniqueness theorem.

В данной работе рассматриваются обобщенные решения краевой задачи для уравнения теплопроводности на произвольном геометрическом графе. С помощью замены интегральными тождествами классических постановок краевых задач обобщенными строятся аналоги соболевских пространств, являющиеся плотными множествами в $L_2(\Gamma \times [0,T])$. Для рассматриваемой краевой задачи доказывается теорема об однозначной разрешимости. Полученные результаты используются при изучении задач граничного управления тепловыми процессами в сложных сетеподобных системах, ассоциированных с геометрическим графом.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим связный компактный граф-дерево Γ с корнем ξ_0, множеством узлов $V = \{\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m\}$ и множеством ребер $\Re = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m\}$; длина каждого ребра равна 1. Здесь и ниже мы придерживаемся обозначений, принятых в монографии [1]. Узел называется граничным, если он принадлежит только одному ребру (граничное ребро), все остальные узлы и ребра – внутренние; множество граничных узлов обозначим через $\partial\Gamma$, $J(\Gamma)$ – множество внутренних узлов: $V = \partial\Gamma \cup J(\Gamma)$. Обозначим через Γ_0

[1]Воронежский государственный университет; E-mail: volan100@mail.ru

объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T)$, $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0,T)$ и $\Gamma_{\{t_0\}} = \Gamma_0 \times \{t_0\}$ – сечение области Γ_T плоскостью $t = t_0$, $t_0 \in (0,T)$.

Естественным образом вводится частичная упорядоченность на Γ: для двух точек a_1 и a_2 определено отношение $a_1 \le a_2$, если a_1 лежит на единственном пути, соединяющем корень ξ_0 с a_2. Обозначим через $[\omega,\varpi] = \{z \in \Gamma : \omega \le z \le \varpi\}$ и если $[\omega,\varpi]$ – ребро γ, то ω – начальная точка γ, ϖ – конечная точка γ. Объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, обозначим через Γ_0: $\Gamma_0 = \Gamma \setminus V$; под $\overline{\Gamma}_0$ понимается несвязное объединение всех ребер – замкнутых отрезков. Для каждого внутреннего узла ξ обозначим через $R(\xi)$ множество ребер, выходящих из ξ. Для любого узла $\xi \in V$ длина пути, соединяющего корень ξ_0 с ξ, является целым неотрицательным числом, обозначим его через $|\gamma|$ и назовем порядком узла ξ. Пусть $V^{(\nu)} = \{\xi \in V : |\xi| = \nu\}$ – множество узлов порядка ν.

Занумеруем узлы графа Γ следующим образом: $\partial\Gamma = \{\xi_0, \xi_1, ..., \xi_p\}$, $\xi_{p+1} \in V^{(1)}$, а ξ_j, $j > p+1$, занумерованы в порядке возрастания $|\xi_j|$, $J(\Gamma) = \{\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, ..., \xi_m\}$. Аналогично занумерованы ребра: γ_k, $k = \overline{1, p+1}$ – граничные ребра ($\gamma_{p+1} = [\xi_0, \xi_{p+1}]$), $\gamma_k = [\xi_{k_j}, \xi_k]$, $k = \overline{p+2, m}$, $k_j < k$ – внутренние ребра. Каждое ребро $\gamma \in \Re$ параметризуется отрезком $[0,1]$. Ориентацию на ребрах удобно выбрать следующим образом: если $\gamma = [\omega,\varpi]$, то узлу ω соответствует число 1, узлу ϖ – число 0.

Пусть Γ – произвольный связный компактный граф, содержащий циклы. В каждом цикле фиксируется ребро и ему принадлежащий узел. Формальное разъединение графа по таким узлам, оставляющее граф связным, превращает его в «дерево». Ориентация и параметризация, а также нумерация узлов и ребер полученного графа приведены выше. Внутренний узел произвольного графа может иметь более одного входящего в него ребра в отличие от внутреннего узла графа-дерева, имеющего только одно входящее в него ребро. Аналогично обозначению множества $R(\xi)$ ребер, выходящих из внутреннего узла ξ, через $r(\xi)$ обозначим множество ребер, входящих в узел ξ.

Через $L_2(\Gamma)$, $L_2(\Gamma_T)$ обозначим пространство функций, интегрируемых с квадратом на Γ и Γ_T, соответственно. Пространство функций $u(x) \in L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка обозначим через $W_2^1(\Gamma)$.

Сужение функции $f(x,t)$ на ребро γ_k будем обозначать через $f(x,t)_{\gamma_k}$. Интеграл от функции $f(x,t)$ по области Γ_T понимается как сумма вида

$$\int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)dxdt = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k \times (0,T)} f(x,t)_{\gamma_k} dxdt.$$

Через $W_2^{2,1}(\Gamma_T)$ обозначим пространство функций $u(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого и второго порядка по x и обобщенную производную первого порядка по t, которые принадлежат $L_2(\Gamma_T)$. Норму $\|\cdot\|_{W_2^{2,1}(\Gamma_T)}$ в $W_2^{2,1}(\Gamma_T)$ определим скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^{2,1}(\Gamma_T)} \equiv \int\limits_{\Gamma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dxdt.$$

Через $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ обозначим пространство функций $u(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка по x, которые принадлежат $L_2(\Gamma_T)$. Норма $\|\cdot\|_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)}$ в $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ определяется скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)} \equiv \int\limits_{\Gamma_T} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdt.$$

Через $W_2^{1}(\Gamma_T)$ обозначим пространство функций $u(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка по x и по t , которые принадлежат $L_2(\Gamma_T)$. Норма $\|\cdot\|_{W_2^{1}(\Gamma_T)}$ в $W_2^{1}(\Gamma_T)$ определяется скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^{1}(\Gamma_T)} \equiv \int\limits_{\Gamma_T} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdt.$$

Через $V_2(\Gamma_T)$ обозначим пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму вида

$$\|u\|_{V_2(\Gamma_T)} \equiv vrai \max_{0\le t\le T} \|u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Gamma_T)}, \tag{1}$$

$V_2^{1,0}(\Gamma_T)$ состоит из всех элементов $u \in V_2(\Gamma_T)$, сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$, т.е. таких, что $\|u(x,t+\Delta t) - u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ равномерно на $(0,T)$.

Введем необходимые подпространства пространств $W_2^{2,1}(\Gamma_T)$, $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, $W_2^{1}(\Gamma_T)$ и $V_2(\Gamma_T)$.

Обозначим через $\Omega(\Gamma_T, J(\Gamma))$ множество элементов пространства $W_2^{2,1}(\Gamma_T)$, чьи следы определены на всех сечениях $\Gamma_{\{t_0\}}$ как функции класса $W_2^1(\Gamma)$ и непрерывны по $t \in (0,T)$ в норме $W_2^1(\Gamma)$, а также выполняются следующие соотношения [2]: [2]

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x},\ \xi \in J(\Gamma),\ t \in (0,T); \tag{2}$$

[2] Существование таких функций при фиксированном $t \in (0,T)$ показано в [2] для случая графа-звезды, это справедливо и для произвольного графа.

$\Omega_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ – множество функций из $\Omega(\Gamma_T, J(\Gamma))$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma_T$. Пусть $W_2^{2,1}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $W_{2,0}^{2,1}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ – замыкания $\Omega(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $\Omega_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ по норме $W_2^{2,1}(\Gamma_T)$, соответственно.

Обозначим через $\widetilde{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ множество элементов пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, чьи следы определены на всех $\Gamma_{\{t_0\}}$ как функции класса $L_2(\Gamma)$, и непрерывны по $t \in (0,T)$ в норме $L_2(\Gamma)$, а также выполняются соотношения (2); $\widetilde{\Omega}_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ – множество функций из $\widetilde{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma_T$. $W_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $W_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ – замыкания $\widetilde{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $\widetilde{\Omega}_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ по норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, соответственно.

Обозначим через $\widehat{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ множество элементов пространства $W_2^1(\Gamma_T)$, чьи следы определены на всех $\Gamma_{\{t_0\}}$ как функции класса $L_2(\Gamma)$, и непрерывны по $t \in (0,T)$ в норме $L_2(\Gamma)$, а также выполняются соотношения (2); $\widehat{\Omega}_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ – множество функций из $\widehat{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma_T$. $W_2^1(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $W_{2,0}^1(\Gamma_T, J(\Gamma))$ – замыкания $\widehat{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $\widehat{\Omega}_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ по норме $W_2^1(\Gamma_T)$, соответственно.

Через $V_2(\Gamma_T, J(\Gamma))$ обозначим пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, имеющих конечную норму (1); $V_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ – состоит из всех элементов $u \in V_2(\Gamma_T, J(\Gamma))$, сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$; $V_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ – пересечение $V_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ и $W_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$.

2. Задача граничного управления тепловыми процессами в классе $\mathrm{W}_2^{2,1}(\Gamma_\mathrm{T})$

В представленном разделе применительно к уравнению теплопроводности в области Γ_T сформулируем задачу граничного управления дифференциальной системой в классе обобщенных решений соответствующих краевых задач (класс $W_2^{2,1}(\Gamma_T)$). Полное исследование таких краевых задач представлено в разделе 3.

На функциях $u(x,t)$ пространства $W_{2,0}^{2,1}(\Gamma_T, J(\Gamma)) \subset W_2^{2,1}(\Gamma_T)$ рассмотрим уравнение

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) \tag{3}$$

с граничным условием

$$u\,|_{\partial\Gamma_T} = \mu(t); \tag{4}$$

в разделе 3 будет показано, как понимать уравнение (3) для функций $u(x,t) \in W_{2,0}^{2,1}(\Gamma_T, J(\Gamma))$. Соотношения

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{5}$$

$$u(x,T) = \tilde{\varphi}(x) \tag{6}$$

определяют начальные при $t = 0$ и финальные при $t = T$ состояния системы (3), (4), соответственно.

Пусть $\varphi(x), \widetilde{\varphi}(x) \in W^1_{2,0}(\Gamma, J(\Gamma))$, $f(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$.

Задача граничного управления системой (3), (4) *в классе* $W^2_2(\Gamma_T)$ *состоит в определении времени* T *и управляющей функции* $\mu(t) \in L_2(0,T)$ *из граничного условия* (4) *такой, чтобы в момент времени* $t = 0$ *выполнялись начальные условия* (5), *а в момент времени* $t = T$ *выполнялись финальные условия* (6).

Рассмотрим последовательности начальных $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ и финальных $\{\widetilde{\varphi}_n(x)\}_{n\geq 1}$ условий: $\varphi_n(x)$, $\widetilde{\varphi}_n(x) \in C^1[\Gamma]$ и $\varphi_n \to \varphi$, $\widetilde{\varphi}_n \to \widetilde{\varphi}$ в норме пространства $W^1_{2,0}(\Gamma, J(\Gamma))$. Пусть для фиксированного n решена задача граничного управления системой (4), состоящая в определении времени T и переводе системы (3), (4) из начального состояния $\varphi_n(x)$ в финальное состояние $\widetilde{\varphi}_n(x)$. Обозначим ее решение через $\mu_n(t)$: $\mu_n(t) \in C(\Gamma)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последовательностях $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$, $\{\widetilde{\varphi}_n(x)\}_{n\geq 1}$ в норме пространства $W^1_{2,0}(\Gamma, J(\Gamma))$, получаем функцию $\mu^*(t)$, являющуюся решением задачи граничного управления дифференциальной системой (3), (4) в классе $W^{2,1}_2(\Gamma_T)$. Мы не останавливаемся на обосновании принадлежности $\mu^*(t)$ пространству $L_2(0,T)$, вытекающем из представления управляющих функций $\mu_n(t)$ стандартным способом. Основное внимание уделим однозначной разрешимости краевых задач в классе обобщенных решений $W^{2,1}_2(\Gamma_T)$.

3. Разрешимость краевой задачи для уравнения теплопроводности в классе $\mathrm{W}^{2,1}_2(\Gamma_\mathrm{T})$

Для уравнения

$$(\mathbb{L}_0 u)(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{7}$$

рассмотрим задачу нахождения решения $u(x,t)$ в области $\overline{\Gamma_T}$, удовлетворяющего начальному

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \Gamma \tag{8}$$

и краевому условию

$$u\,|_{\partial\Gamma_T} = 0, \tag{9}$$

здесь $f(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$.

Определение 1. *Решением класса* $W^{2,1}_2(\Gamma_T)$ *уравнения* (3) называется функция $u(x,t) \in W^{2,1}_2(\Gamma_T, J(\Gamma))$, удовлетворяющая почти всюду в Γ_T уравнению (3).

Определение 2. *Решением класса* $W_2^{2,1}(\Gamma_T)$ *краевой задачи* (3)–(4) называется функция $u(x,t) \in W_{2,0}^{2,1}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, являющаяся решением уравнения (3) и равная $\varphi(x)$ при $t = 0$.

Замечание 1. *Равенство* $u(x,t) = \varphi(x)$ *при* $t = 0$ *понимается как стремление к нулю* $\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$ *при* $t \to 0$. *Это имеет смысл для элементов* $W_{2,0}^{2,1}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, *так как они определены для любого* $t \in (0,T)$ *как элементы* $L_2(\Gamma)$ *и непрерывны в норме* $L_2(\Gamma)$ *по* t.

Далее используется идея, заложенная в [3]. Краевую задачу (3)–(4) переформулируем как задачу решения операторного уравнения

$$Au = \{f;\varphi\}, \tag{10}$$

где A есть оператор, сопоставляющий $u(x,t)$ пару элементов $\mathbb{L}_0 u$ и $u(x,0)$, так что

$$Au = \{\mathbb{L}_0 u; u(x,0)\}. \tag{11}$$

Оператор A действует из пространства $L_2(\Gamma_T)$ в гильбертово пространство $\mathcal{W}$, являющееся прямым произведением пространства $L_2(\Gamma_T)$ и $W_{2,0}^1(\Gamma, J(\Gamma))$. Элементами $\mathcal{W}$ являются пары $\{g(x,t);\psi(x)\}$ с $g(x,t) \in$ $\in L_2(\Gamma_T)$, $\psi \in W_{2,0}^1(\Gamma, J(\Gamma))$, а скалярное произведение определяется равенством

$$(\{g',\psi'\}, \{g'',\psi''\})_{\mathcal{W}} = \int\limits_{\Gamma_T} g'g''dxdt + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi''}{\partial x}dx.$$

В качестве области определения $D(A)$ оператора A возьмем элементы вида $\psi(x) + \int\limits_0^t \chi(x,\tau)d\tau$, где $\psi \in D(\Delta)$, $\chi(x,t) \in D(\Delta)$ для почти всех t из $(0,T)$ и $\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} \in L_2(\Gamma_T)$. Под $D(\Delta)$ понимается совокупность обобщенных решений из $W_2^1(\Gamma)$ задачи

$$\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x),\ u\,|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{12}$$

когда $f(x) \in L_2(\Gamma)$. Отметим, что если в (8) $f = \widehat{f}(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$, то решение $\widehat{u}(x,t)$ задачи (8) принадлежит вместе с $\frac{\partial\widehat{u}(x,t)}{\partial x}$ к $L_2(\Gamma_T)$. Для $\widehat{u}$ и любой $v \in W_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial^2\widehat{u}(x,t)}{\partial x^2} \cdot v dxdt = -\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial\widehat{u}(x,t)}{\partial x}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}dxdt,$$

уравнение $\frac{\partial^2\widehat{u}(x,t)}{\partial x^2} = \widehat{f}$ удовлетворяется для почти всех $(x,t) \in \Gamma_T$.

Кроме того, функции $f = \int\limits_0^t \widehat{f}(x,\tau)d\tau$ соответствует решение $u(x,t)$ задачи (8), равное $\int\limits_0^t \widehat{u}(x,\tau)d\tau$, $(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^t \widehat{u}(x,\tau)d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,\tau)d\tau = = \int\limits_0^t \widehat{f}(x,\tau)d\tau = f)$, причем $u(x,t)$ будет элементом $W^1_{2,0}(\Gamma, J(\Gamma))$, непрерывно зависящим от t.

Ввиду этого, элементы $v(x,t) = \psi(x) + \int\limits_0^t \chi(x,\tau)d\tau$, составляющие $D(A)$, при любом $t \in (0,T)$, принадлежат $D(\Delta)$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}d\tau$ и $\frac{\partial v}{\partial x} = = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \int\limits_0^t \frac{\partial \chi}{\partial x}d\tau$ суть элементы $L_2(\Gamma)$, непрерывно зависящие от t. Оператор A на $v(x,t)$ вычисляется следующим образом

$$Av = \left\{\chi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \int\limits_0^t \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}d\tau; \psi\right\}.$$

Множество $D(A)$ плотно в $L_2(\Gamma_T)$, так как $D(\Delta)$ составляет плотное множество в $L_2(\Gamma)$.

Лемма 1. *Оператор A допускает замыкание.*

Доказательство. Чтобы доказать, что оператор A допускает замыкание, необходимо показать следующее: если $v_m \in D(A), m = 1, 2, ..., v_m \to 0$ в норме $L_2(\Gamma_T)$ и $Av_m \equiv \{f_m, \varphi_m\} \to \{f, \varphi\}$ в норме $\mathcal{W}$, то $f \equiv \varphi \equiv 0$. Убедимся в справедливости этого утверждения.

Возьмем произвольную достаточно гладкую функцию $\eta(x,t)$, равную нулю на $\partial\Gamma$ и при $t = T$, и соответствующий ей интеграл $\int\limits_{\Gamma_T} \mathbb{L}_0 v_m \eta\, dxdt$. Преобразуем этот интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\Gamma_T} \mathbb{L}_0 v_m \eta\, dxdt = \int\limits_{\Gamma_T} v_m \left(-\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) dxdt - \int\limits_{\Gamma} v_m \eta\, dx \mid_{t=0}.$$

В этом равенстве можно перейти к пределу по $m \to 0$: $\int\limits_{\Gamma_T} \mathbb{L}_0 v_m \eta\, dxdt \to \int\limits_{\Gamma_T} f\eta\, dxdt$, $\int\limits_{\Gamma_T} v_m \left(-\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) dxdt \to 0$, $\int\limits_{\Gamma} v_m \eta\, dx \mid_{t=0} \to \int\limits_{\Gamma} \varphi\eta(x,0)\, dx$. В результате чего получим

$$\int\limits_{\Gamma_T} f\eta\, dxdt = -\int\limits_{\Gamma} \varphi\eta(x,0)\, dx$$

для любой $\eta(x,t)$, обладающей указанными выше свойствами. Отсюда выводится тождественное равенство нулю функций f и φ, так как множество пар $\{\eta(x,t),\eta(x,0)\}$ плотно в $L_2(\Gamma_T)\times W^1_{2,0}(\Gamma,J(\Gamma))$. Итак, оператор A допускает замыкание $\overline{A}$. Лемма доказана. ■

Для описания области пределения $D(\overline{A})$ и вычисления $\overline{A}$ на элементах $D(\overline{A})$ преобразуем интеграл вида $\int\limits_{\Gamma_t}(\mathbb{L}_0 v)^2dxdt$ с помощью интегрирования по частям, где $v(x,t)$ есть произвольный элемент $D(A)$, а t – любое из $(0,T)$

$$\int\limits_{\Gamma_t}(\mathbb{L}_0 v)^2dxdt=\int\limits_{\Gamma_t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2-2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right]dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Gamma_t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right]dxdt+\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2dx-\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}\right)^2dx.$$

Далее получаем

$$\left\|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+\int\limits_{\Gamma_t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right]dxdt=$$
$$=\left\|\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+\int\limits_{\Gamma_t}(\mathbb{L}_0 v)^2dxdt. \quad (13)$$

Из (9) следует, что сходимость Av_m ($v_m\in D(A)$) в $\mathcal{W}$ влечет сходимость v_m в нормах $W^{2,1}_2(\Gamma_T)$ и $\sup\limits_{0\le t\le T}\|\cdot\|_{W^1_2(\Gamma)}$. Это доказывает, что элементы области определения $D(\overline{A})$ замыкания $\overline{A}$ оператора уже элементов $D(A)$, а именно: они принадлежат $W^{2,1}_{2,0}(\Gamma_T,J(\Gamma))$, непрерывно зависят от t в норме $W^1_{2,0}(\Gamma,J(\Gamma))$ и для них справедливо равенство (9). Оператор $\overline{A}$ на них определен тем же равенством (7), т. е.

$$\overline{A}v=\{\mathbb{L}_0 v;v(x,0)\}.$$

Из (9) следует, что процедура замыкания A сводится к замыканию области значений $\mathbb{R}(A)$ в $\mathcal{W}$, так что $\overline{\mathbb{R}(A)}=\mathbb{R}(\overline{A})$ и на $\mathbb{R}(\overline{A})$ существует ограниченный обратный оператор $\overline{A}^{-1}$. Если будет доказано, что к $\mathbb{R}(A)$ в $\mathcal{W}$ нет ортогонального дополнения, то из вышесказанного об $\overline{A}$ будет следовать, что $\overline{A}^{-1}$ определен на всем $\mathcal{W}$, т. е. уравнение

$$\overline{A}u=\{f;\varphi\}$$

однозначно разрешимо при $\{f;\varphi\}\in\mathcal{W}$. Тем самым будет доказана следующая теорема, аналогичная теореме 2.1 главы III [3].

Теорема 1. *Задача* (3)–(4) *однозначно разрешима в* $W^{2,1}_{2,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, *если* $f \in L_2(\Gamma_T)$, *а* $\varphi \in W^1_{2,0}(\Gamma, J(\Gamma))$. *Решение* $u(x,t)$ *непрерывно зависит от* t *в норме* $W^1_2(\Gamma)$.

Доказательство . Для того чтобы доказать эту теорему, необходимо показать, что в $\mathcal{W}$ к $\mathbb{R}(A)$ нет ортогонального дополнения, т. е. доказать, что из тождества

$$\int\limits_{\Gamma_T} \omega(x,t)(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \Delta v(x,t))dxdt + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}dx = 0, \qquad (14)$$

где v – произвольный элемент $D(A)$, а $\{\omega, \psi\} \in \mathcal{W}$, следует, что $\omega \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$.

Для этого по функции ω построим функцию

$$v(x,t) = \left\{ \begin{array}{c} \int\limits_{t_1}^{t} \Delta^{-1}\omega(x,\tau)d\tau,\ t \geq t_1, \\ 0,\ t < t_1 \end{array} \right\},$$

где t_1 – какое-либо из $(0,T)$. Ясно, что $v(x,0) = 0$ и $v(x,t) \in D(A)$. Подставим его в (10), в результате чего получим

$$\int\limits_{t_1}^{T}\int\limits_{\Gamma} \Delta\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \Delta v\right)dxdt = 0.$$

(второй интеграл в левой части (10) равен нулю в силу представления функции $v(x,t)$). Откуда в результате интегрирования по частям по переменной x следует

$$-\int\limits_{t_1}^{T}\int\limits_{\Gamma}\left(\tfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right)^2 dxdt - \tfrac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(\Delta v)^2 dx\ |_{t=t_1}^{t=T} = 0. \qquad (15)$$

Так как $\Delta v\ |_{t=t_1} = 0$ и t_1 произвольно, то из (11) следует, что $\frac{\partial v}{\partial x \partial t} \equiv 0$ и $\Delta v \equiv 0$, а потому и $\omega = \Delta\frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0$. В силу этого обстоятельства тождество (10) для любой функции $v(x,t) \in D(A)$ с отличной от нуля $v(x,0) \in D(\Delta)$ примет вид

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}dx = 0. \qquad (16)$$

Так как $\psi \in W^1_{2,0}(\Gamma, J(\Gamma))$, а $D(\Delta)$ плотно в $W^1_{2,0}(\Gamma, J(\Gamma))$, то из (12) следует, что $\psi \equiv 0$. Итак, доказано, что $\omega = \psi \equiv 0$, т. е. $\overline{\mathbb{R}(A)} = \mathcal{W}$. Теорема доказана. ∎

Список литературы

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.
2. *Волкова А. С.* Обобщенное решение краевой задачи для эллиптического уравнения на графе // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2012. № 1. С. 28–29.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М. : Физматлит, 1973. 408 с.

Поступила в редакцию 8.12.2012.