УДК 512.543

Д. Н. Азаров, И. Г. Васькова

О финитной аппроксимируемости нильпотентных групп

Доказано, что нильпотентная группа конечного общего ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит полных элементов отличных от 1. Приведён пример, показывающий, что в доказанном утверждении условие конечности общего ранга существенно. Получено также необходимое и достаточное условие для того, чтобы нильпотентная группа конечного общего ранга аппроксимировалась конечными *p*-группами.

1. Введение

Группа G называется финитно аппроксимируемой, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу такой, что образ элемента a относительно φ отличен от 1. Это равносильно тому, что пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.

Элемент a группы G называется полным, если для любого целого положительного числа n уравнение

$$x^n = a$$

разрешимо в группе G. Очевидно, что в финитно аппроксимируемой группе нет полных элементов отличных от 1. А. И. Мальцев в [1] заметил, что для абелевых групп имеет место и обратное утверждение. Таким образом, абелева группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит полных элементов отличных от 1.

В данной работе устанавливается, что эта теорема не может быть обобщена с абелевых групп на нильпотентные группы. Соответствующим примером может служить построенная в п. 2 группа P, удовлетворяющая следующим четырём условиям.

1. Группа P нильпотентна.

2. Группа P является периодической и удовлетворяет тождеству $x^4 = 1$. В частности, в группе P нет полных элементов отличных от 1.

3. Группа P не является финитно аппроксимируемой.

4. Все неединичные нормальные подгруппы группы P финитно отделимы.

Группа P, построенная в п. 2, представляет собой обобщённое прямое произведение счётного числа экземпляров группы кватернионов с объединёнными центрами. Идея использования этой конструкции для построения группы с условиями 1 – 3 была предложена А. Л. Шмелькиным.

Заметим ещё, что любая абелева группа с условием 2 финитно аппроксимируема. Вообще, любая периодическая абелева группа с ограниченными порядками элементов в силу первой теоремы Прюфера раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп и поэтому является финитно аппроксимируемой группой.

Рассмотрим теперь следующий вопрос: каким дополнительным ограничениям должна удовлетворять нильпотентная группа, чтобы на неё могла быть распространена упомянутая выше теорема Мальцева. Одним из таких ограничений является конечность общего ранга.

Напомним, что группа G имеет конечный общий ранг, если существует число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой её подгруппе с не более чем r образующими. Очевидно, что любая конечно порожденная группа имеет конечный общий ранг. Другим примером группы конечного общего ранга является любая подгруппа аддитивной группы рациональных чисел.

В п. 3 настоящей работы доказывается следующий результат.

Теорема 1. *Пусть G – нильпотентная группа конечного общего ранга. Тогда пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G совпадает с множеством всех её полных элементов. В частности, группа G финитно* *аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит полных элементов отличных от* 1.

Непосредственным следствием из этой теоремы является известный результат Грюнберга [2] о финитной аппроксимируемости произвольной конечно порожденной нильпотентной группы. В самом деле, в любой полициклической группе и, в частности, в любой конечно порожденной нильпотентной группе нет полных элементов отличных от 1.

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимируемости нильпотентных групп конечными p-группами, где p – простое число. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой конечными p-группами, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу такой, что образ элемента a относительно φ отличен от 1. Это равносильно тому, что пересечение всех нормальных подгрупп конечного p-индекса группы G совпадает с единичной подгруппой. Элемент a группы G называется p-полным, если для любого целого положительного числа s уравнение

$$x^{p^s} = a$$

разрешимо в группе G. По аналогии с доказательством теоремы 1 может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть G – нильпотентная группа конечного общего ранга. Тогда пересечение всех нормальных подгрупп конечного p-индекса группы G совпадает с множеством всех p-полных элементов этой группы. В частности, группа G аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда она не содержит p-полных элементов отличных от* 1.

С помощью этой теоремы может быть легко доказан известный результат Грюнберга [2] об аппроксимируемости конечными p-группами произвольной конечно порожденной нильпотентной группы без кручения (для любого простого числа p).

Действительно, пусть G – произвольная конечно порождённая нильпотентная группа. Очевидно, что элемент a группы G является p-полным тогда и только тогда, когда порядок этого элемента конечен и взаимно прост с p. Поэтому в качестве следствия из теоремы 2 мы получаем следующий результат из [2].

Конечно порождённая нильпотентная группа G аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда все элементы конечного порядка группы G являются p-элементами. В частности, любая конечно порождённая нильпотентная группа без кручения аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p.

2. Пример нильпотентной группы с тождеством $x^4 = 1$, не являющейся финитно аппроксимируемой

Рассмотрим группу кватернионов

$$Q_8 = \left\langle a, b; a^4 = 1, b^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}, a^{-1}ba = b^{-1} \right\rangle.$$

Пусть

$$G = Q_8 \times Q_8 \times \ldots$$

– прямое произведение счетного числа экземпляров группы Q_8. Так как центр группы Q_8 совпадает с циклической подгруппой (h) порядка 2 с порождающим элементом $h = a^2$, то центр группы G совпадает с множеством

$$H = (h) \times (h) \times \ldots$$

всевозможных последовательностей вида

$$\left(h^{n_1}, h^{n_2}, \ldots\right)$$

в которых числа n_i почти все равны 0. Обозначим через K подгруппу группы H, состоящую из всех элементов $\left(h^{n_1}, h^{n_2}, \ldots\right)$ группы H таких, что $n_1 + n_2 + \ldots$ делится на 2. Заметим, что в этой сумме только конечное число слагаемых отлично от 0.

Рассмотрим фактор-группу G/K. Эта группа представляет собой обобщенное прямое произведение бесконечного числа экземпляров группы Q_8 с объединенными центрами. Очевидно, что H/K – конечная подгруппа порядка 2 группы G/K.

Покажем, что подгруппа H/K совпадает с центром группы G/K. Так как H совпадает с центром группы G, то H/K содержится в центре группы G/K. Докажем обратное включение. Пусть элемент xK принадлежит центру группы G/K, то есть для любого элемента yK из G/K выполняется равенство $[xK, yK] = K$, или, что то же самое $[x, y] \in K$, где $[xK, yK]$ и $[x, y]$ – коммутаторы соответствующих элементов. Поэтому, записывая элементы x и y в виде

$$x = (x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...),$$

где x_i и y_i принадлежат группе кватернионов, получаем:

$$([x_1, y_1], [x_2, y_2], ...) \in K.$$

Полагая здесь $y_2 = 1, y_3 = 1$ и т. д. имеем:

$$([x_1, y_1], 1, 1, ...) \in K.$$

Отсюда следует, что коммутатор $[x_1, y_1]$ является степенью элемента h с четным показателем, и поэтому $[x_1, y_1] = 1$. Так как y_1 – произвольный элемент из Q_8, то x_1 принадлежит центру группы Q_8, то есть $x_1 \in (h)$. То же самое можно утверждать и об элементах x_2, x_3, и т. д. Поэтому $x \in H$, и, следовательно, $xK \in H/K$. Таким образом, центр группы G/K совпадает с подгруппой H/K.

Так как группа Q_8 нильпотентна, то группа G/K также нильпотентна. Хорошо известно, что в нильпотентной группе любая нееединичная нормальная подгруппа имеет нетривиальное пересечение с центром. Так как центр H/K нильпотентной группы G/K является подгруппой порядка 2, то из сказанного выше следует, что любая неединичная нормальная подгруппа группы G/K содержит H/K. В частности, любая нормальная подгруппа конечного индекса группы G/K содержит H/K. Поэтому группа G/K не является финитно аппроксимируемой. Тем не менее, в группе G/K нет полных элементов отличных от 1. В самом деле, группа Q_8 удовлетворяет тождеству $x^4 = 1$. Отсюда следует, что данному тождеству удовлетворяет группа G и её фактор-группа G/K. Поэтому если a – неединичный элемент группы G/K, то уравнение $x^4 = a$ неразрешимо в группе G/K.

Таким образом, группа G/K нильпотентна, не содержит полных элементов отличных от 1 и не является финитно аппроксимируемой.

Заметим еще, что группа G/K представляет собой пример не финитно аппроксимируемой группы, в которой все неединичные нормальные подгруппы финитно отделимы. В самом деле, пусть V/K – неединичная нормальная подгруппа группы G/K. Как отмечалось выше $H/K \le V/K$, то есть $H \subseteq V$. Поэтому

$$(G/K)/(V/K) \cong G/V \cong (G/H)/(V/H).$$

Отсюда и из того, что G/H – абелева группа с тождеством $x^2 = 1$ следует, что

$$(G/K)/(V/K)$$

– абелева группа с тождеством $x^2 = 1$. Поэтому в силу первой теоремы Прюфера группа $(G/K)/(V/K)$ раскладывается в прямое произведение циклических групп и, следовательно, является финитно аппроксимируемой группой. Поэтому V/K – финитно отделимая подгруппа группы G/K.

Таким образом, группа $P = G/K$ удовлетворяет условиям 1 – 4 из пункта 1.

3. Доказательства теорем

Лемма. *Пусть* F *– разрешимая периодическая группа конечного общего ранга и порядки элементов группы* F *ограничены. Тогда группа* F *конечна. В частности, если* G *– разрешимая группа конечного общего ранга, то для каждого целого положительного числа* m *степенная подгруппа* G^m *имеет конечный индекс в группе* G *.*

Доказательство. Обозначим через F' коммутант группы F. Фактор-группа F/F' является периодической абелевой группой, и порядки её элементов ограничены. Поэтому в силу первой теоремы Прюфера группа F/F' раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп. Число подгрупп в этом разложении конечно, так как группа F/F' наследует конечность общего ранга от группы F. Следовательно, группа F/F' конечна, то есть F' имеет конечный индекс в группе F.

Очевидно, что в группе конечного общего ранга все подгруппы конечного индекса имеют конечный общий ранг. Поэтому F' – группа конечного общего ранга. Кроме того, F' – разрешимая периодическая группа с ограниченными порядками элементов и ступень разрешимости группы F' меньше чем ступень разрешимости группы F. Поэтому в силу индуктивных соображений F'– конечная группа. Отсюда и из того, что индекс $\left[F : F'\right]$ конечен следует, что группа F также является конечной.

Лемма доказана.

Перейдем теперь к **доказательству теоремы 1.**

Для произвольной группы G будем обозначать через $\omega(G)$ и $\sigma(G)$ множество всех полных элементов группы G и пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G соответственно. Так как в конечной группе нет полных элементов отличных от 1, то любой полный элемент группы G отображается в 1 при любом гомоморфизме группы G на конечную группу. Поэтому

$$\omega(G) \subseteq \sigma(G).$$

Предполагая дополнительно, что G – нильпотентная группа конечного общего ранга, докажем, что

$$\sigma(G) \subseteq \omega(G).$$

Допустим от противного, что некоторый элемент a из G принадлежит $\sigma(G)$, но не является полным. Тогда, найдется целое положительное число n такое, что уравнение

$$x^n = a$$

неразрешимо в группе G. Отсюда, по лемме 2 из [1] следует, что

$$a \notin G^{n^c},$$

где c – ступень нильпотентности группы G. По доказанной выше лемме подгруппа G^{n^c} имеет конечный индекс в группе G. Таким образом, элемент a не принадлежит некоторой нормальной подгруппе конечного индекса группы G. Это противоречит тому, что $a \in \sigma(G)$. Мы видим, таким образом, что

$$\omega(G) = \sigma(G),$$

и тем самым теорема 1 доказана**.** Теорема 2 может быть доказана аналогично.

Библиографический список

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учён. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т.18 № 5. С. 49–60.
2. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 3. № 25. P. 29–65.