УДК 517.27

М. Е. Лузина, С. В. Пухов

К теоремам А. Л. Гаркави и В. Л. Левина об очистке в задачах выпуклого программирования

В статье рассматриваются теоремы «об очистке» типа теорем А.Л. Гаркави и В.Л. Левина. Даются геометрические доказательства этих теорем, основанные на теореме Хелли о пересечении выпуклых множеств.

Введение

В статье рассматриваются важные теоремы теории экстремальных задач – теорема «об очистке» А. Л. Гаркави (в случае, когда минимизируемый функционал есть поточечный максимум выпуклых функций) и теорема «об очистке» В. Л. Левина (для задачи выпуклого программирования с континуумом ограничений), см. [1], [3–5].

Эти теоремы применяются в геометрии, теории приближений и других областях математики. Например, с помощью теоремы «об очистке» А. Л. Гаркави можно получить некоторую информацию об описанной около тела сфере; в теории приближений теорема «об очистке» В. Л. Левина приводит к классической теореме Чебышёва об альтернансе.

Цель этой статьи – дать доказательства теорем «об очистке», носящие прозрачный геометрический характер.

§ 1. Теорема Хелли

В этом параграфе приводится одна из фундаментальных теорем выпуклого анализа – теорема Э. Хелли об общих точках семейства выпуклых подмножеств конечномерного пространства, а также следствия из этой теоремы. На этой теореме основываются дальнейшие геометрические доказательства теорем «об очистке».

Теорема Хелли была открыта автором в 1913 г., но опубликована сначала Радоном в 1921 г., а собственное доказательство Хелли опубликовано лишь в 1923 г. (перевод статьи на русский язык см. [6]). Эта теорема, ее различные обобщения и следствия из неё подробно рассмотрены в [2].

Рассмотрим теорему Хелли для конечного семейства выпуклых множеств в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 1.1. *Пусть в* $\mathbf{R}^n$ *задана конечная совокупность выпуклых множеств, из которых каждые* $n+1$ *имеют общую точку. Тогда все множества этой совокупности имеют общую точку.*

Замечание. Теорема Хелли обобщается на бесконечные семейства при условии, что все множества этого семейства замкнуты, и пересечение некоторых $n+1$ из них ограничено.

Теорема 1.2. *Пусть K – семейство из не менее чем* $n+1$ *выпуклых множеств в* $\mathbf{R}^n$ *, причем K конечно или каждое множество из K компактно. Тогда, если каждые* $n+1$ *из множеств семейства K имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая всем множествам семейства K.*

Приведем ещё одну теорему, вытекающую из теоремы Хелли, которая в дальнейшем будет использоваться при доказательстве теоремы «об очистке» А. Л. Гаркави в случае семейства конечной мощности.

Теорема 1.3. *Если выпуклое множество в* $\mathbf{R}^n$ *покрыто конечным семейством открытых или замкнутых полупространств, то оно покрыто какими-нибудь* $n+1$ *или менее из этих полупространств.*

§ 2. Теорема об «очистке» А. Л. Гаркави

Второй параграф посвящен теореме «об очистке» А. Л. Гаркави. В нем дается геометрическое доказательство этой теоремы в случае, когда множество параметров T имеет конечную мощность.

Приведем общую формулировку теоремы «об очистке» А. Л. Гаркави, см., например, [1].

Теорема 2.1. *Пусть* X *– линейное нормированное пространство конечной размерности,* $\dim X = n$, T *– компакт и отображение* $f(x,t): X \times T \to \mathbf{R}$ *таково, что для всех* $t \in T$ $f(\cdot,t): X \to \mathrm{R}$ *– выпуклая функция и при каждом* x *из* X *функция* $f(x,\cdot): T \to \mathbf{R}$ *непрерывна.*

Положим $F(x) = \max\limits_{t \in T} f(x,t)$ *и пусть* $\bar{x}$ *– точка абсолютного минимума* $F(x)$*, то есть*

$$\min_{x \in X} F(x) = F(\bar{x}) \overset{def}{=} M .$$

Тогда существуют натуральное число k, $k \le n+1$*, и набор элементов* $\{t_1, \ldots, t_k\} \subset T$*, такие, что для функции* $f(x) = \max\limits_{1 \le i \le k} f(x,t_i)$ *точка* $x = \bar{x}$ *является точкой абсолютного минимума на* X*, причем* $M = \min\limits_{x \in X} f(x)$.

Таким образом, множество T можно «очистить» до k точек, $k \le n+1$, и минимакс по всему семейству $\{f(x,t)\}_{t \in T}$ окажется равным минимаксу по подсемейству $\{f(x,t_i)\}_{1 \le i \le k}$.

Мы докажем эту теорему для случая, когда T – множество конечной мощности.

Доказательство. Предварительно заметим, что надо считать, что множество T содержит более $n+1$ точек, иначе утверждение теоремы очевидно.

Суть доказательства состоит в «отсеивании» функций, не влияющих на значение $M = \min\limits_{x \in X} \max\limits_{t \in T} f(x,t)$.

Перейдем от множества T к множеству

$$\tilde{T} = \{t \in T : f(\bar{x}, t) = F(\bar{x})\}.$$

Таким образом, мы исключаем из рассмотрения те функции, графики которых не проходят через точку $(\bar{x}, M)$.

Очевидно, что $M = \min\limits_{x \in X} \max\limits_{t \in T} f(x,t) = \min\limits_{x \in X} \max\limits_{t \in \tilde{T}} f(x,t)$.

Это следует из непрерывности выпуклых функций, определенных на конечномерном пространстве.

Для $t \in \tilde{T}$ пусть $x_t^* \in \partial f(x, t)$, то есть

$$f(x, t) - f(\bar{x}, t) \ge \left\langle x_t^*, x - \bar{x} \right\rangle \ \forall x \in X.$$

Введем в рассмотрение аффинную (по x) функцию

$$\varphi(x, t) = \left\langle x_t^*, x - \bar{x} \right\rangle + f(\bar{x}, t).$$

Из определения $\partial f(x, t)$ следует, что для любого $t \in \tilde{T}$ и для любого $x \in X$ выполнено неравенство $f(x, t) \ge f(\bar{x}, t) + \left\langle x_t^*, x - \bar{x} \right\rangle$, то есть $f(x, t) \ge \varphi(x, t)$, причем $f(\bar{x}, t) = \varphi(\bar{x}, t)$. Для фиксированного $t \in \tilde{T}$ графиком $\varphi(x, t)$ является гиперплоскость, лежащая «ниже» графика $f(x, t)$ и проходящая через точку $(\bar{x}, M)$.

Обозначим для любого $t \in \tilde{T}$ через P_t следующее множество

$$P_t = \{x \in X : \varphi(x, t) \ge \varphi(\bar{x}, t)\}.$$

Очевидно, что неравенство $\varphi(x, t) \geq \varphi(\bar{x}, t)$ равносильно неравенству $\left\langle x_t^*, x - \bar{x} \right\rangle + f(\bar{x}, t) \geq f(\bar{x}, t)$, т.е. неравенству $\left\langle x_t^*, x - \bar{x} \right\rangle \geq 0$. Таким образом, $P_t = \left\{x \in X : \left\langle x_t^*, x - \bar{x} \right\rangle \geq 0\right\}$ – полупространства в X, проходящие через точку $\bar{x}$, на которых $\varphi(x, t) \geq M$. Покажем, что эти полупространства покрывают все X, т. е. $\bigcup\limits_{t \in \text{₮}} P_t = X$.

Пусть, напротив, $\bigcup\limits_{t \in \text{₮}} P_t \neq X$. Тогда существует элемент $\text{€} \in X$ такой, что для любого $t \in \text{₮}$ $\left\langle x_t^*, \text{€} - \bar{x} \right\rangle < 0$. Отсюда для любого $t \in \text{₮}$ и для любого $\alpha > 0$

$$f(\bar{x}, t) - f(\bar{x} + \alpha(\text{€} - \bar{x}), t) \geq \left\langle x_t^*, -\alpha(\text{€} - \bar{x}) \right\rangle = -\alpha \left\langle x_t^*, \text{€} - \bar{x} \right\rangle > 0$$

Так как $\alpha > 0$ и $\left\langle x_t^*, \text{€} - \bar{x} \right\rangle < 0$, то

$$f(\bar{x} + \alpha(\text{€} - \bar{x}), t) < f(\bar{x}, t) = F(\bar{x}),$$

тогда и $\max\limits_{t \in \text{₮}} f(\bar{x} + \alpha(\text{€} - \bar{x}), t) < F(\bar{x})$. Это противоречит тому, что $\bar{x}$ – точка абсолютного минимума $F(x)$. Таким образом, $\{P_t\}_{t \in \text{₮}}$ – покрытие X.

Из этого покрытия по теореме 1.3 можно выбрать конечное подпокрытие с множеством элементов не более, чем $n + 1$. Обозначим через $\widetilde{T}$ множество всех таких $t \in \text{₮}$, что P_t принадлежит этому конечному подпокрытию.

Заметим, что $\widetilde{T} \subset \text{₮}$ и $f(\bar{x}, t) = M$.

Перейдем к $\widetilde{T}$. Пусть $f(x) = \max\limits_{t \in \widetilde{T}} f(x, t)$, $x \in X$. Покажем, что точка $x = \bar{x}$ является точкой абсолютного минимума функции $f(x)$ и $\min\limits_{x\in X} f(x) = M$. Тем самым мы докажем теорему, поскольку множество $\widetilde{T}$ содержит не более $n+1$ элементов.

Так как для произвольного $t \in \widetilde{T}$ $f(\bar{x}, t) = M$, то $f(\bar{x}) = \max\limits_{t\in\widetilde{T}} f(\bar{x}, t) = M$. Таким образом, если мы покажем, что $\min\limits_{x\in X} f(x) = M = f(\bar{x})$, то для любого $x \in X$ $f(x) \geq f(\bar{x})$, и, значит, $\bar{x}$ – точка абсолютного минимума функции $f(x)$.

Докажем, что $\min\limits_{x\in X} f(x) = M$.

1). Так как для любого $x \in X$ $\max\limits_{t\in\widetilde{T}} f(x,t) \leq \max\limits_{t\in T} f(x,t)$, то есть $f(x) \leq F(x)$, то $\min\limits_{x\in X} f(x) \leq \min\limits_{x\in X} F(x) = M$.

2). Для любого $t \in \widetilde{T}$ и любого $x \in P_t$ выполнено неравенство $f(x, t) \geq \varphi(x, t) \geq f(\bar{x}, t) = M$. Тогда $\max\limits_{t\in\widetilde{T}} f(x,t) \geq M$, т. е. $f(x) \geq M$.

Но и для любого $x \in \bigcup\limits_{t\in\widetilde{T}} P_t = X$ выполнено неравенство $f(x) \geq M$, тогда в силу произвольности x $\min\limits_{x\in X} f(x) \geq M$. Значит, $\min\limits_{x\in X} f(x) = M$. Теорема доказана.

§ 3. Теорема «об очистке» В. Л. Левина

В этом параграфе рассмотрена задача минимизации выпуклой функции на замкнутом выпуклом множестве при некоторых ограничениях в виде неравенств, формулируется общая теорема «об очистке» В.Л. Левина. Исследуется задача минимизации выпуклой функции при конечном числе ограничений, каждое из которых состоит в принадлежности x определенному выпуклому множеству. Показано, что из этих ограничений можно выбрать не более $n+1$ таких, что минимальное значение функции не уменьшится, если отбросить все остальные.

Рассмотрим экстремальную задачу:

$$f(x) \to \min, \tag{1}$$

при ограничениях на $x \in M$

$$g(t, x) \le 0, t \in T. \tag{2}$$

Здесь X – линейное нормированное пространство конечной размерности, $\dim X = n$, M – замкнутое выпуклое множество в X, T – компакт, функция $f : M \to \mathbf{R}$ выпукла и непрерывна на M, функция $g : T \times M \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ полунепрерывна сверху по t при каждом $x \in M$ и выпукла и непрерывна по x при каждом $t \in T$.

Теорема 3.1. *Предположим, что система ограничений* (2) *совместна и для любых n ограничений $t_1, \ldots, t_n$ из* (2) *найдется вектор $y(t_1, \ldots, t_n) \in M$, удовлетворяющий им как строгим неравенствам. Тогда существуют такие $r \le n$ ограничений $t_1^0, \ldots, t_r^0$, что все остальные можно отбросить, не уменьшая минимального значения f, то есть*

$$\inf\{f(x): g(t,x) \le 0, t \in T\} = \inf\left\{f(x): g\left(t_j^0, x\right) \le 0, j = 1, \ldots, r\right\}.$$

Доказательство этой теоремы приведено в [4], см. также [5].

Мы исследуем аналогичную задачу минимизации выпуклой функции при конечном числе ограничений, каждое из которых состоит в принадлежности x определенному выпуклому множеству.

Пусть X – линейное нормированное пространство размерности n, T – множество конечной мощности и для любого $t \in T$ множество D_t – выпуклое множество в X.

Рассмотрим экстремальную задачу вида:
минимизировать

$$f(x) \to \min \tag{3}$$

при ограничениях

$$x \in D = \bigcap_{t \in T} D_t \ , \tag{4}$$

где $f(x)$ – выпуклая функция, определенная на X, а множество D предполагается непустым.

Замечание. В приведенной выше теореме $D_t = \{x \in M : g(t, x) \le 0\}, \ t \in T$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\bar{x}$ *– решение экстремальной задачи* (3)-(4)*, то есть точка абсолютного минимума* f *на* D *и* $M = \min\limits_D f$.

Тогда существуют такие $r \le n+1$ *выпуклых множеств* $D_{t_1}, \ldots, D_{t_r}$ *, что все остальные можно отбросить, не уменьшая минимального значения* f*, то есть*

$$\min\left\{ f(x) : x \in \bigcap_{t \in T} D_t \right\} = \min\left\{ f(x) : x \in \bigcap_{t \in \{t_1, \ldots t_r\}} D_t \right\}.$$

Доказательство. Если $\bar{x}$ – точка абсолютного минимума f на X, а по предположению $\bar{x} \in D_t$ при любом $t \in T$, то утверждение теоремы справедливо, если в качестве ограничения оставить любое из D_t .

Поэтому далее считаем, что точка $\bar{x}$ не является точкой абсолютного минимума f на X. Рассмотрим два случая:

1). Пусть $\bar{x}$ – точка абсолютного минимума f хотя бы на одном из множеств D_t. Поскольку $\bar{x} \in D_t$ при любом $t \in T$, то утверждение теоремы справедливо, если в качестве ограничения оставить это D_t.

2). Пусть $\bar{x}$ не является точкой абсолютного минимума ни на одном из D_t.

Рассмотрим множество $H = \{x \in X : f(x) < f(\bar{x})\}$. Множество H – выпуклое множество, так как $f(x)$ – выпуклая функция.

Если $\bar{x}$ – точка абсолютного минимума экстремальной задачи (3)–(4), то это равносильно условию, что $H \bigcap \left(\bigcap\limits_{t \in T} D_t \right) = \varnothing$.

Действительно, если бы это было не так, то нашлась бы точка $\tilde{x} \neq \bar{x}$ из $D = \bigcap\limits_{t \in T} D_t$, для которой $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$, что противоречит тому, что $\bar{x}$ – точка абсолютного минимума.

Представим

$$H \bigcap D = H \bigcap (\bigcap_{t \in T} D_t) = \bigcap_{t \in T} (H \bigcap D_t) = \bigcap_{t \in T} \Omega_t,$$

где $\Omega_t = H \bigcap D_t$ – выпуклые множества как пересечения выпуклых множеств.

Из того, что $\bigcap\limits_{t \in T} \Omega_t = \varnothing$ следует, что существует $r \in N$, $r \leq n+1$ и существуют $t_1, \ldots, t_r$ такие, что $\bigcap\limits_{t \in \{t_1, \ldots, t_r\}} \Omega_t = \varnothing$.

Действительно, если бы это было не так, то каждые $n+1$ выпуклых множеств из конечной совокупности $\{\Omega_t\}_{t \in T}$ имели бы общую точку, и по теореме Хелли все множества этой совокупности имели бы общую точку, то есть $\bigcap_{t\in T}\Omega_t \neq \varnothing$ (противоречие).

Итак, $\bigcap_{t\in\{t_1,\ldots,t_r\}}\Omega_t = \varnothing$. Отсюда, $\bar{x}$ – точка абсолютного минимума в экстремальной задаче:

$$f(x) \to \min ,$$
$$x \in D_r = \bigcap_{t\in\{t_1,\ldots t_r\}} D_t .$$

Доказанное утверждение позволяет «ослабить» ограничения при решении экстремальной задачи (3)–(4) (то есть «очистить» эту экстремальную задачу).

Библиографический список

1. *Гаркави А. Л.* Общие теоремы об очистке // Rev. Math. Pures et Appl., 6, № 2 (1961). С. 293–303.
2. *Данцер Л, Грюнбаум Б, Кли В.* Теорема Хелли. М.: Мир, 1968. 160 с.
3. *Магарил–Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М*. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 176 с.
4. *Левин В.Л.* Применение теоремы Э. Хелли в выпуклом программировании, задачах наилучшего приближения и смежных вопросах // Матем. сб., 79, № 2 (1969). С. 250–263.
5. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. – М.: Наука, 1985 г. 352 с.
6. *Хелли Э.* О совокупности выпуклых тел с общими точками // УМН. 1936. Вып. 2. С. 80–81.