Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2000 С. 116 – 122

Е. П. Барановский, В. П. Гришухин

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТЕПЕНИ НЕЖЕСТКОСТИ *L*-РАЗБИЕНИЯ РЕШЕТКИ

Степенью нежесткости L-разбиения решетки называется размерность области L-типа, содержащей соответствующие решетке положительные квадратичные формы. В статье построен алгоритм вычисления степени нежесткости L-разбиений решеток. Введено понятие L-связей решетки и вычисление степени нежесткости сведено к их отысканию.

Non-rigidity degree of L-partition of a lattice is defined as dimension of the L-type domain containing the positive quadratic form corresponding to a basis of the lattice. In this note an algorithm of the calculation of the non-rigidity degree of L-partition of a lattice is constructed. The construction of this algorithm is based on the theory of the repartioning complexes.

УДК 514.17; ББК 22.144.4.

1. L-связи и многогранники переделивания

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве E^n точечную n-мерную решетку Γ^n и заданное ею разбиение пространства E^n на L-многогранники (L-разбиение решетки). Напомним, что L-многогранником решетки Γ^n называется n-мерный многогранник с вершинами в точках решетки, расположенными на поверхности "пустой" сферы, т. е. сферы, не содержащей других, кроме вершин многогранника, точек решетки.

В общем случае L-многогранники суть симплексы; решетки, L-разбиения которых состоят только из симплексов, называют общими. В противном случае, когда среди L-многогранников имеются отличные от симплексов, решетки называют специальными.

Если решетка Γ^n общая, то при достаточно малой вариации базисного репера решетки ее L-разбиение сохраняется и у варьированной решетки. (Под сохранением L-разбиения мы понимаем то, что относительно варьированного репера элементы L-разбиения, т. е. грани всевозможных размерностей, будут иметь те же координаты, что и у исходной решетки.)

В случае вариации специальной решетки ее L-многогранники, отличные от симплексов, т. е. имеющие более чем $n+1$ вершину, могут перестать быть L-многогранниками. Для сохранения L-разбиения специальной решетки требуется, чтобы ее варьированные параметры удовлетворяли некоторым определенным условиям, которые мы будем называть *условиями L-связей.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00010).

Определение. *Степенью нежесткости L-разбиения решетки называется разность между количеством параметров решетки и числом тех зависимостей, которые наложены на них условиями L-связей. Решетки, степень нежесткости L-разбиения которых минимальна, т. е. равна 1, называются решетками с жестким L-разбиением [1].*

Используя понятие областей L-типов, на которые разбивается конус положительных квадратичных форм (см. [3]), первое предложение этого определения можно заменить эквивалентным ему следующим:

Степенью нежесткости L-разбиения решетки называется размерность области L-типа, содержащей соответствующие решетке формы.

Из определения следует, что общие решетки имеют максимальную степень нежесткости своих L-разбиений; для n-мерной решетки она равна $N = \frac{1}{2}n(n+1)$. Решетки с жестким L-разбиением — это решетки, L-разбиение которых разрушается при любой, кроме преобразования подобия, деформации.

Конкретное описание и фактическое отыскание условий L-связей мы базируем на теории многогранников переделивания [4, 7]. Отметим, что основы ее заложены в знаменитой работе Г. Ф. Вороного [3].

Мы далее предполагаем, что решетка Γ^n задана посредством задания положительной квадратичной формы

$$f = f(\bar{x}) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{1}$$

— метрической формы одного из основных (базисных) реперов решетки. Тем самым решетка определена заданием $N = \frac{1}{2}(n+1)n$ коэффициентов a_{ij} формы f. Условия L-связей для случая таким способом заданных решеток будут представлены как некоторые зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты форм, соответствующих этим решеткам.

Многогранником переделивания решетки Γ^n мы будем называть n-мерный многогранник с вершинами в точках решетки Γ^n, имеющий $n+2$ вершины и обладающий тем свойством, что вокруг него может быть описана сфера и внутри этой сферы не содержится точек решетки. Таким образом, многогранник переделивания представляет собой или некоторый целый L-многогранник решетки Γ^n, или часть такого многогранника.

Пусть D — многогранник переделивания с вершинами $\{\bar{v}_k\}$, $k \in K = \{0, 1, ..., n+1\}$. Через D_k будем обозначать выпуклую оболочку множества вершин многогранника D, из которого выброшена вершина с номером k. Множество номеров вершин многогранника D_k обозначим через I_k. Так как многогранник D n-мерный, то среди многогранников D_k имеется хотя бы один n-мерный симплекс. Если все эти многогранники — такие симплексы, то многогранник переделивания называется многогранником *общего вида*, в противном случае — *специального*.

Так как многогранник D n-мерный, а точки множества $\{\bar{v}_k\}$ линейно зависимы, то для них существуют единственные с точностью до ненулевого множителя такие коэффициенты λ^k, среди которых есть отличные от 0, что

$$\sum_k \lambda^k \bar{v}_k = \bar{0}, \qquad \sum_k \lambda^k = 0. \tag{2}$$

Строку коэффициентов $(\lambda^0, \lambda^1, ..., \lambda^{n+1})$ из разложения (2) будем называть *характеристикой* многогранника переделивания.

Многогранник переделивания можно разбить на симплексы двумя и только двумя способами (см., напр., [7]). Вид того и другого способа разбиения однозначно связан с характеристикой многогранника.

Отметим, что если среди коэффициентов характеристики нет нулей, то многогранник D — общего вида. Если среди этих коэффициентов m $(1 \leq m \leq n-2)$ нулей, то многогранник D — специального вида и представляет собой m-пирамиду над $(n-m)$-мерным многогранником переделивания общего вида. За большими подробностями относительно многогранника переделивания мы отсылаем читателя к упоминавшимся выше работам [4, 7].

Существование многогранника переделивания в L-разбиении решетки Γ^n определяется условием, приведенным в следующей лемме:

Лемма. *Для того, чтобы в L-разбиение решетки, заданной формой $f(\bar{x})$, входил многогранник переделивания с характеристикой*

$$(\lambda^0, \lambda^1, ..., \lambda^{n+1})$$

и вершинами в точках решетки $\{\bar{v}_k\}$, $k \in K$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия для коэффициентов формы:

$$\sum_{k \in K} \lambda^k f(\bar{v}_k) = 0. \tag{3}$$

$\triangleright$ Пусть у многогранника переделивания D входящий в него многогранник D_k является n-мерным симплексом и $\{z^l\}$, $l \in I_k$, $\sum_{I_k} z^l = 1$ — барицентрические координаты точки $\bar{v}_k$ относительно симплекса D_k как базиса. Условие того, что точка $\bar{v}_k$ лежит на поверхности сферы, описанной вокруг симплекса D_k, имеет вид

$$\sum_{l \in I_k} z^l (\bar{v}_l - \bar{v}_k)^2 = 0, \tag{4}$$

где $z^l = -\frac{\lambda^l}{\lambda^k}$. Раскрыв в (4) скобки, используя (2) и то, что $\bar{v}_k^2 = f(\bar{v}_k)$, приходим к (3).$\bullet$

Как следует из леммы, находящиеся в L-разбиении решетки Γ^n многогранники переделивания задают согласно формуле (3) для коэффициентов формы f по одному условию L-связи каждый.

Таким образом, условия L-связей будут представлены в форме линейных уравнений вида (3) относительно коэффициентов задающей решётку Γ^n формы (1).

Обратимся к случаю, когда среди L-многогранников решетки Γ^n имеется многогранник Π, имеющий $n+p+1$ вершину

$$\bar{v}_0, \bar{v}_1, ..., \bar{v}_{n+1}, ..., \bar{v}_{n+p}, \qquad p \geq 2,$$

и пусть $S = conv\{\bar{v}_0, \bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$ является n-мерным симплексом. Тогда на каждый из многогранников

$$S + \{\bar{v}_{n+1}\}, ..., S + \{\bar{v}_{n+p}\} \tag{5}$$

можно смотреть как на многогранник переделивания и по формуле (3) определить для каждого из них условие L-связи — линейное уравнение, которому должны удовлетворять коэффициенты формы f. Многогранники списка (5) назовём *p-элементами* L-многогранника.

Рассмотрев всё множество попарно негомологичных L-многогранников решетки и отыскав множество p-элементов этих многогранников, получим некоторую систему линейных уравнений вида (3), неизвестными которых являются коэффициенты формы f. Как следует из сказанного выше, для сохранения L-разбиения решетки требуется, чтобы коэффициенты варьированной формы удовлетворяли полученной системе. Таким образом, эта система представляет собой множество условий L-связей. Уравнения системы будем называть *L-уравнениями.* Сказанное выше позволяет сформулировать следующее

Предложение 1. *Степень нежесткости L-разбиения решетки Γ^n равна разности между количеством ее параметров $N = \frac{1}{2}n(n+1)$ и рангом системы L-уравнений.*

Пусть некоторый L-многогранник Π решетки Γ^n имеет P вершин. Как прямое следствие леммы и предложения 1 имеем

Предложение 2. *Степень нежесткости L-многогранника* Π *не меньше, чем $N+n+1-P = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)-P$, а степень нежесткости L-разбиения решетки не меньше, чем*

$$N - \sum_q (P_q - n - 1),$$

где сумма берется по всем попарно негомологичным L-многогранникам решетки.

$\triangleright$ В многограннике Π выделим n-мерный симплекс и $P-(n+1)$ многогранников переделивания (5). Каждый из этих многогранников дает L-уравнение. Если ранг полученной системы максимален, мы получаем степень нежесткости многогранника Π равную $N-P+(n+1)$, в противном случае степень нежесткости будет меньше. Дальнейшее очевидно.$\bullet$

Согласно [3, 4, 7] n-мерный многогранник переделивания V^n_{p+q}, $n = p+q$, представляет собой выпуклую оболочку двух симплексов S^p и S^q, задающих соответственно p- и q-мерные плоскости, пересечением которых является точка. До $n \le 6$ все виды многогранников переделивания известны [7]; им соответствуют символы V^2_{11}, V^4_{22}, $V^5_{23}, V^6_{33}, V^6_{24}$ и характеристики

$$(-1,-1,1,1),\ (-1,-1,-1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1,1,1,2),$$
$$(-1,-1,-1,-1,1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1,-1,1,2,2),$$
$$(-2,-1,-1,-1,1,1,1,2),\ (-2,-1,-1,-1,-1,1,2,3), \tag{6}$$
$$(-2,-2,-1,-1,1,1,1,3).$$

2. DL-связи и минимальные векторы на классах четности

В списке (6), как и в его продолжении на большие размерности, особое место занимает многогранник V_{11}^2 — прямоугольник. Возникшие благодаря p-элементам вида V_{11}^2 L-связи будем называть *диагональными (DL-связями)*, поскольку наличие в элементах L-разбиения диагоналей однозначно определено этими связями (см. [2]).

По формуле (3) согласно характеристике (-1,-1,1,1) p-элементу вида V_{11}^2 соответствует DL-связь

$$f(\bar{v}_0) + f(\bar{v}_1) = f(\bar{v}_3) + f(\bar{v}_4), \tag{7}$$

где пары $(\bar{v}_0, \bar{v}_1)$, $(\bar{v}_2, \bar{v}_3)$ суть пары противоположных вершин прямоугольника. Легко видеть, что DL-связь (7) эквивалентна следующему равенству:

$$f(\bar{v}_1 - \bar{v}_0) - f(\bar{v}_3 - \bar{v}_2) = 0, \tag{8}$$

где векторы $\bar{v}_1 - \bar{v}_0$, $\bar{v}_3 - \bar{v}_2$ определяют диагонали прямоугольника V_{11}^2. Действительно, из соотношения $\bar{v}_0 + \bar{v}_1 = \bar{v}_2 + \bar{v}_3$ и равенства (7) следует равенство $\bar{v}_0\bar{v}_1 = \bar{v}_2\bar{v}_3$, которое вместе с (7) приводит к (8).

Пусть $E = \{O; \bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$ — n-мерный репер в евклидовом пространстве E^n, $x^1, ..., x^n$ — координаты точек и векторов относительно репера E как базиса, $\Gamma^n(E)$ — построенная на репере E решетка, и пусть (1) — метрическая форма репера E. Рассмотрим множество классов смежности факторгруппы $\Gamma^n/2\Gamma^n$, исключим нулевой класс и каждому из классов поставим в соответствие индекс четности — n-мерный вектор вида $\bar{\epsilon} = (\epsilon^1, ..., \epsilon^n)$, $\epsilon^i \in \{0, 1\}$.

Рассмотрим множество значений задающей решетку $\Gamma^n(E)$ формы (1) на соответствующем индексу $\bar{\epsilon}$ классе четности

$$\bar{\epsilon} + 2\bar{p} = (\epsilon^1 + 2p^1, ..., \epsilon^n + 2p^n),$$

где $p^1, ..., p^n$ пробегают независимо друг от друга все множество тех целых чисел, для которых НОД$(\epsilon^1 + 2p^1, ..., \epsilon^n + 2p^n) = 1$. Среди этого множества найдется минимальное значение. Оно достигается на конечном числе векторов, которые мы будем называть *минимальными векторами*, или *М-векторами*, на классе четности $\bar{\epsilon}$. Так как среди М-векторов каждый вектор встречается вместе с противоположным ему, то каждую такую пару будем рассматривать как один М-вектор.

Пусть множество М-векторов по некоторому индексу четности $\bar{\epsilon}$ суть r векторов

$$\bar{m}_1, ..., \bar{m}_r. \tag{9}$$

В этом случае L-разбиение решетки содержит грань размерности $d \leq r$, имеющую $2r$ вершин и r диагоналей, определяемых М-векторами (2); диагонали пересекаются в общей точке и делятся в ней пополам. Такого рода грани называются *первичными элементами* L-разбиения. Среди граней L-разбиения только первичные элементы обладают внутренними диагоналями (см. [2]).

При $r = 1$, т. е. в случае, когда М-вектор по данному индексу четности единствен, первичный элемент представляет собой ребро L-разбиения. В этом случае мы назовем первичный элемент *тривиальным*. При $r > 1$

первичные элементы будем называть *нетривиальными первичными элементами*, или коротко НПЭ.

Сопоставим множеству М-векторов (9) по рассматриваемому индексу четности $\bar{\epsilon}$ равенства

$$f(\bar{m}_1) = F, \dots, f(\bar{m}_r) = F, \tag{10}$$

где F — минимальное значение квадратичной формы (1) на множестве векторов класса четности по индексу $\bar{\epsilon}$. Приравняв левые части равенств (10) какой-нибудь одной из них, скажем, из первого равенства, получим следующую систему из $r-1$ равных 0 разностей:

$$\begin{aligned} &f(\bar{m}_2) - f(\bar{m}_1) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &f(\bar{m}_r) - f(\bar{m}_1) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Тем самым мы получили условия DL-связи, соответствующие некоторому p-элементу вида V_{11}^2.

3. Алгоритм

Сказанное выше в пп. 1 и 2 позволяет предложить следующий метод отыскания степени нежесткости L-разбиения данной решётки Γ^n.

1. Найти множество М-векторов $M = \{\bar{m}_\nu\}$ решетки по всем индексам четности, где векторы $\bar{m}_\nu$ рассматриваются заданными своими координатами относительно произвольного основного репера E решетки.

2. Для каждого из НПЭ решетки по соответствующему множеству М-векторов составить однородную систему вида (4), рассмотреть все такие системы вместе как единую систему, соответствующую множеству DL-связей решетки, и найти ее ранг $\rho \leq N-1$.

Если размерность n решетки Γ^n не больше 4, то вычисления закончены, поскольку все L-связи в решетках этих размерностей являются DL-связями (об исключительном случае одной 4-мерной решетки см. [4]), и степень нежесткости решетки Γ^n равна $N-\rho$. Вычисления закончены также и в том случае, когда $\rho = N-1$, т. е. L-разбиение решетки оказалось жестким.

3. Рассмотреть множество многогранников переделивания решетки. Если все они вида V_{11}^2, то вычисления закончены. Если же среди них имеются принадлежащие другим видам, то найти их характеристики и по формуле (3) записать соответствующие им L-уравнения.

4. Полученные в п. 3 L-уравнения присоедить к системе L-уравнений п. 2 и найти ранг R этой общей системы. Число $N-R$ и будет степенью нежесткости L-разбиения решетки Γ^n.

Рассмотренные выше понятия степени нежесткости L-разбиения и жесткого L-разбиения представляют собой расширение введенных и исследованных М. Деза, В. П. Гришухиным и М. Лоран в работах [5, 6] понятий ранга и экстремальности L-многогранников. Если условия связи взять не для всего L-разбиения, а только для входящего в L-разбиение некоторого L-многогранника, то число, соответствующее степени нежесткости L-разбиения, есть *ранг* этого многогранника. L-многогранник называется *экстремальным*, если его ранг равен 1. Таким образом, если

L-многогранник экстремален, то L-разбиение, в которое он входит, является, по нашей терминологии, жестким.

Библиографический список

1. *Барановский Е. П.* Жесткость L-разбиений решеток // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. XII Междунар. конф. М., 1999.
2. *Барановский Е. П.* Разбиение евклидовых пространств на L-многогранники некоторых совершенных решёток // Тр. МИАН СССР. М., 1991. Т. 196.
3. *Вороной Г. Ф.* Собрание сочинений. Киев, 1952. Т. 2.
4. *Рышков С. С., Барановский Е. П.* С-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий) // Тр. МИАН СССР, М., 1976. Т. 134.
5. *Deza M., Grishukhin V. P., Laurent M.* Extreme hypermetrics and L-polytopes // Sets, Graphs and Numbers. Collog. Math. Soc. J. Bolyai. 1991. Vol. 60.
6. *Deza M., Grishukhin V. P., Laurent M.* Hypermetrics in geometry of numbers // DIMACS Ser. disc. math. and theor. comp. science. 1995.Vol. 20.
7. *Ryshkov S. S., Baranovskii E. P.* The repartioning complexes in n-dimensional lattices (with full discription for $n \leq 6$) // Voronoi's impact on modern science. Ed. by P. Engel, H. Syta. Kyiv, 1998. Vol. 2.