Вестник Ивановского государственного университета

*Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»*

Вып. 3 / 2000 С. 122 – 128

**С. В. Колесников**

# О КЛАССИФИКАЦИИ ТИПА БЭРА ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Для порядковых чисел $\alpha$ не выше второго класса подобно классам функций Бэра вводятся классы $A_\Gamma^\alpha$ функций, определенных на единичной окружности $\Gamma$. В качестве нулевого класса берется множество всех полиномов от комплексного переменного $z$.

Класс $A_\Gamma^\alpha$ определяется как класс функций $f(z)$, представляющихся поточечными пределами равномерно ограниченных последовательностей функций из $\cup_{\beta<\alpha} A_\Gamma^\beta$ и не принадлежащих предшествовавшим классам. Доказывается, что $A_\Gamma^\alpha$ совпадает с классом функций, являющихся граничными значениями функций, ограниченных и аналитических внутри $\Gamma$ и принадлежащих обычному $\alpha$-классу Бэра.

In this article, for ordinal numbers $\alpha$ of the first or second class, classes $A_\Gamma^\alpha$ of functions on the unit circle $\Gamma$ are defined. These classes are defined similar to well-known Baire classes of functions. Class of polynomials of complex variable is considered as a zero class.

Class $A_\Gamma^\alpha$ is the class of functions which are point-wise limits of uniformly bounded sequences of functions from $U_{\beta<\alpha} A_\Gamma^\beta$ and do not belong to preceding classes. It is proved here that $A_\Gamma^\alpha$ is the class of functions which are boundary values of bounded analytic functions on unit disk and belong to ordinary Baire $\alpha$-class.

УДК 517.5; ББК 22.161.

Пусть $D$ — единичный круг $|z| < 1$, $\Gamma$ — окружность $|z| = 1$, $H^\infty$ — класс функций аналитических и ограниченных в $D$. Если $f(z) \in H^\infty$, то по теореме Фату, почти в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ функция $f$ имеет радиальные пределы $f(\zeta)$. Класс граничных значений функций из $H^\infty$ будем обозначать $H_\Gamma^\infty$.

Функция $f(\zeta)$, определенная на окружности $\Gamma$, называется функцией первого класса Бэра, если существует последовательность непрерывных на $\Gamma$ функций, сходящаяся к $f(\zeta)$ в каждой точке окружности $\Gamma$, и $f(\zeta)$ не является непрерывной. Классы Бэра для порядковых чисел $\alpha$ первого или второго класса определяются посредством трансфинитной индукции. Функция $f(\zeta)$ принадлежит $\alpha$-классу Бэра, если она является пределом последовательности функций $f_n(\zeta)$, каждая из которых принадлежит некоторому $\alpha_n$-классу, $\alpha_n < \alpha$, и $f(\zeta)$ не является функцией $\beta$-класса Бэра при $\beta < \alpha$.



Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00119).

Определим классы функций $A_\Gamma^\alpha$, подобные классам Бэра, следующим образом: функция $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, принадлежит первому классу $A_\Gamma^1$, если она является поточечным пределом некоторой последовательности полиномов $P_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно ограниченной на $\Gamma$. Если все классы $A_\Gamma^\beta$ для порядковых чисел $\beta < \alpha$ уже определены, то класс $A_\Gamma^\alpha$ определим как класс функций, не входящих ни в один из предшествующих классов и представляющихся в виде предела равномерно ограниченной последовательности функций из классов $A_\Gamma^\beta$, $\beta < \alpha$.

В настоящей заметке доказывается, что класс $A_\Gamma^\alpha$ совпадает с классом всех ограниченных на $\Gamma$ функций, принадлежащих одновременно $\alpha$-классу Бэра и $H_\Gamma^\infty$.

Вопрос об условиях принадлежности функции к классу $A_\Gamma^1$ рассматривался М. В. Келдышем. Если для функции $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, существует последовательность полиномов $P_n(\zeta)$, равномерно ограниченная на $\Gamma$: $|P_n(\zeta)| \le K$, $K > 0$, сходящаяся поточечно к функции $f(\zeta)$, то очевидно:

1) функция $f(\zeta)$ ограничена, $|f(\zeta)| \le K$;

2) функция $f(\zeta)$ принадлежит первому классу Бэра на $\Gamma$.

Моменты функции $f(\zeta)$ равны нулю:

$$\int_\Gamma \zeta^n f(\zeta)\, d\zeta = \lim_{k\to\infty} \int_\Gamma \zeta^n P_k(\zeta)\, d\zeta = 0\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

откуда следует, что

3) функция $f(\zeta)$ почти всюду на $\Gamma$ совпадает с угловыми граничными значениями некоторой функции ограниченной и аналитической в круге $D$, т.е. принадлежит $H_\Gamma^\infty$.

Обратно, М. В. Келдышем [1] было показано, что если функция $f(\zeta)$ удовлетворяет условиям 1) – 3) и, кроме того, ее множество точек разрыва имеет линейную лебегову меру нуль, то существует последовательность полиномов $P_n(\zeta)$, равномерно ограниченная на $\Gamma$, сходящаяся в каждой точке окружности $\Gamma$ к функции $f(\zeta)$.

Автором [3] было доказано, что для существования такой последовательности полиномов достаточно только условий 1) – 3), следовательно, для класса $A_\Gamma^1$ имеет место следующая

**Теорема 1.** *Для того, чтобы функция $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, принадлежала классу $A_\Gamma^1$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной функцией первого класса Бэра и принадлежала $H_\Gamma^\infty$.*

Ниже доказывается, что аналогичное утверждение верно и для класса $A_\Gamma^\alpha$, где $\alpha > 1$ — любое порядковое число не выше второго класса.

**Теорема 2.** *Для любого порядкового числа $\alpha > 1$ первого или второго класса класс функций $A_\Gamma^\alpha$ совпадает с классом всех функций $f(\zeta)$, ограниченных на $\Gamma$, принадлежащих одновременно $H_\Gamma^\infty$ и $\alpha$-классу Бэра.*

Предпошлем доказательству этой теоремы несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** *(См. [3].) Пусть $G$ — открытое подмножество окружности $\Gamma$, $E \subset G$ — множество линейной меры нуль. Тогда для любого*

$\epsilon > 0$ *существуют открытое множество* $O$, $E \subset O \subset G$, *и аналитическая в круге* $D$ *функция* $g(z)$ *такие, что:*

*1)* $|g(z)| < 2,\ 0 < Reg(z) < 1$ *при* $z \in D$*;*

*2) в каждой точке* $\zeta \in \Gamma$ *функция* $g(z)$ *имеет конечные радиальные пределы* $g(\zeta)$*;*

*3) в точках* $\zeta \in O$ *функция* $g(z)$ *аналитична и* $Reg(z) = 1$*;*

*4)* $|g(z)| < \epsilon$ *на каждом радиусе* $R_{\zeta_0}$ *с концом в точке* $\zeta_0 \in \Gamma \setminus G$.

**Лемма 2.** *Пусть* $E_1$ *и* $E_2$ *— два непересекающихся множества на окружности* $\Gamma$, *имеющие тип* $G_\delta$ *и нулевую линейную меру* $mes\, E_1 = mes\, E_2 = 0$. *Тогда существует аналитическая ограниченная функция* $f(z)$, *имеющая радиальные пределы всюду на* $\Gamma$ *(следовательно, принадлежащая классу* $A^1_\Gamma$*), удовлетворяющая неравенству* $|f(\zeta)| < 1$, $\zeta \in \Gamma$, *равная* 1 *на* $E_1$ *и равная 0 на* $E_2$.

*Доказательство.* Покажем сначала, что существует функция $g_1(z)$, аналитическая в круге $D$, с положительной вещественной частью в $D$, имеющая конечные радиальные пределы в каждой точке множества $\Gamma \setminus E_1$ и бесконечные радиальные пределы в точках множества $E_1$.

Представим множество $E_1$ в виде $E_1 = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$, где $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$ — открытые множества, такие, что $\mathrm{mes}\, G_n < 1/2^n$, $n = 1, 2 \ldots.$ Взяв $G = G_n$ и $\epsilon = 1/2^n$, по лемме 1 найдем функцию $h_n(z)$, удовлетворяющую условиям 1) – 4). Из пп. 1) и 4) вытекает, что $||h_n||_1 < 2(\pi + 1)2^n$, откуда следует, что ряд

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z)$$

равномерно сходится внутри круга $D$. Очевидно, функция $g_1(z)$ аналитична в $D$ и имеет положительную действительную часть. По п. 3) леммы 1 для всех функций $f_n$ выполняется равенство $\mathrm{Re}\, h_n(\zeta) = 1$, $\zeta \in E_1$, откуда следует, что $g_1$ имеет бесконечные радиальные пределы на множестве $E_1$. Поскольку каждая точка $\zeta \in \Gamma \setminus E_1$ принадлежит лишь конечному числу множеств $G_n$, то по п. 4) леммы 1 все функции $h_n$ за исключением конечного числа удовлетворяют на радиусе $R_\zeta$ неравенству $|h_n(z)| < 1/2^n$. Отсюда следует, что ряд, представляющий функцию $g_1$, равномерно сходится на радиусе $R_\zeta$. Так как все функции $h_n(z)$ непрерывны в точке $\zeta$ вдоль радиуса $R_\zeta$, то $g_1(z)$ также непрерывна в $\zeta$ вдоль радиуса, т.е. имеет в этой точке конечный радиальный предел.

Таким образом, $g_1$ удовлетворяет требуемым свойствам.

Обозначим теперь через $\varphi(z)$ функцию, конформно отображающую полуплоскость $\mathrm{Re}\, z > 0$ на полуполосу $z :\ |\mathrm{Im}\, z| < 1\,, \mathrm{Re}\, z > 0$, такую, что $\varphi(\infty) = \infty$. Пусть $f_1(z) = \varphi(g_1(z))$.

Поскольку $\varphi(z)$ непрерывна в каждой конечной точке полуплоскости $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, а функция $g_1(z)$ имеет в точках $\zeta \in \Gamma \setminus E_1$ конечные радиальные пределы $g_1(\zeta)$, и $\mathrm{Re}\, g_1(\zeta) \geq 0$, то функция $f_1(z) = \varphi(g_1(z))$ имеет конечные радиальные пределы в каждой точке $\zeta \in \Gamma \setminus E_1$. Очевидно, на множестве $E_1$ функция $f_1(z)$ имеет бесконечные радиальные пределы.

Такую же функцию, построенную для множества $E_2$, обозначим через $f_2(z)$.

Тогда функция $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$ на множествах $E_1$ и $E_2$ имеет радиальные пределы равные, соответственно, $+\infty$ и $-\infty$, а в остальных точках окружности $\Gamma$ имеет конечные радиальные пределы. При этом, поскольку $|\operatorname{Im} f_1(z)| < 1$ и $|\operatorname{Im} f_2(z)| < 1$, то $|\operatorname{Im} g(z)| < 2$.

Пусть $\psi(z)$ конформно отображает полосу $|\operatorname{Im} z < 2|$ на круг, так, что $\psi(-\infty) = -1$ и $\psi(+\infty) = +1$. Очевидно, функция f(z)=$\psi(g(z))$ удовлетворяет условиям леммы.

Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть $E \subset \Gamma$ — множество типа $G_\delta$ нулевой линейной меры, $f(z)$ — ограниченная действительнозначная функция второго класса Бэра на $\Gamma$. Тогда существует равномерно ограниченная последовательность функций $f_n(z)$ из класса $A^1_\Gamma$, сходящаяся в каждой точке множества $E$ к функции $f(z)$.*

*Доказательство.* Покажем, что всякая функция $\varphi$ не выше первого класса приближается равномерно на $E$ граничными значениями ограниченных аналитических функций. Рассмотрим сначала случай, когда значения функции $\varphi$ на $E$ лежат на отрезке [0, 1].

Пусть $\epsilon > 0$ и $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = 1$ такие, что $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k < \epsilon$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Положим

$$E'_k = E(f \leq y_k) = \{z \in E : \ \ \varphi(z) \leq y_k\},$$

$$E''_k = E(f \geq y_{k+1}) = \{z \in E : \ \ \varphi(z) \geq y_{k+1}\},$$

$k = 0, \ldots, n-1$. Множества $E'_k$ и $E''_k$ имеют нулевую линейную меру и, по теореме Лебега о функциях первого класса (см. [4]), являются множествами типа $G_\delta$.

Так как $E'_k$ и $E''_k$ не пересекаются, то, по лемме 2, существует функция $g_k$, аналитическая и ограниченная в $D$: $|g_k(z)| \leq 1$, имеющая радиальные пределы $g_k(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, равные 0 на $E'_k$ и равные 1 на $E''_k$. Положим

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k g_k(z).$$

Пусть $\zeta \in E$ и $y_k \leq \varphi(\zeta) \leq y_{k+1}$. Тогда $g_m(\zeta) = 0$, при $m \leq k+1$, и $g_m(\zeta) = 1$, при $m \leq k-1$. Отсюда

$$g(\zeta) = \sum_{m=0}^{k-1} \Delta y_m g_m(z) + \Delta y_k g_k(z) + \sum_{m=k+1}^{n-1} \Delta y_m g_m(z) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} \Delta y_m + \Delta y_k g_k(z) = \Delta y_k + \Delta y_k g_k(z).$$

Отсюда следует, что $|\varphi(\zeta) - g(\zeta)| < 2\epsilon$. Очевидно, $|g(z)| < 1$.

Пусть теперь функция $\varphi(\zeta)$ действительна на $E$ и $A = \inf_{\zeta \in E} \varphi(\zeta)$, $B = \sup_{\zeta \in E} \varphi(\zeta)$. Применяя к функции $(\varphi(\zeta) - A)/(B - A)$ рассмотренный выше случай, получим, что для функции $\varphi(\zeta)$ существует аналитическая функция $g(z)$, имеющая радиальные граничные значения на $\Gamma$, удовлетворяющая в $D$ неравенству $|g(z)| < B - A + |A| \le 2\sup_{\zeta\in E}|\varphi(\zeta)|$, такая, что $|\varphi(\zeta) - g(\zeta)| < \epsilon$, $\zeta \in E$.

В случае комплекснозначной функции $\varphi$, рассматривая отдельно ее действительную и мнимую части, получим, что существует приближающая функция $g$, удовлетворяющая неравенству $|g(z)| \le 4\sup_{\zeta\in E}|\varphi(\zeta)|$.

Если $f$ — ограниченная на $E$ функция второго класса Бэра, то она представима в виде
$$f(\zeta) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(\zeta),$$
где $\varphi_n(\zeta)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — равномерно ограниченная последовательность функций класса не выше первого.

Используя доказанное выше утверждение, найдем аналитические в $D$ функции $f_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ такие, что $|\varphi_n(\zeta) - f_n(\zeta)| < 1/n$, $\zeta \in E$. При этом, если $|\varphi_n(\zeta)| \le M$, то для функций $f_n$ будет $|f_n(z)| \le 4M$.

Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть множество $E \subset \Gamma$ имеет нулевую линейную меру и тип $G_\delta$. Тогда характеристическая функция $\chi_E(\zeta)$ множества $E$ принадлежит классу $A^2_\Gamma$.*

*Доказательство.* Пусть $E = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, где $G_1 \supset G_2 \supset \cdots,$ — открытые множества на $\Gamma$. Для каждого из множеств $G_n$, по лемме 1, найдем функцию $g_n(z)$, ограниченную и аналитическую в $D$, удовлетворяющую условиям:

1) функция $g_n(z)$ имеет радиальные пределы в каждой точке;
2) $|g_n(z)| \le 2$;
3) $0 < \operatorname{Re} g_n(z) \le 1$, $z \in D$; и $\operatorname{Re} g_n(z) = 1$, $z \in E$;
4) $|g_n(z)| \le \frac{1}{2^n}$ на каждом радиусе с концом в $\Gamma \setminus G_n$.

Пусть
$$f_n(z) = \frac{\sum_{k=1}^n g_k(z)}{\sqrt{n} + \sum_{k=1}^n g_n(z)}\,.$$
Покажем, что последовательность $f_n$ удовлетворяет условиям леммы. Действительно, поскольку функции $g_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеют радиальные пределы в каждой точке окружности $\Gamma$, то $f_n(z)$ также имеет радиальные пределы на $\Gamma$ и, следовательно, граничная функция $f_n(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, принадлежит классу $A^1_\Gamma$. Очевидно, последовательность $f_n$ равномерно ограничена:
$$|f_n(\zeta)| \le 1\,, \quad \zeta \in \Gamma, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Если $\zeta \in E$, то для любого $n = 1, 2, \ldots,$ будет $\operatorname{Re} g_n(\zeta) = 1$, и
$$|\sum_{k=1}^n g_n(\zeta)| > n\,.$$
Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} f_n(\zeta) = 1$. Если $\zeta \in \Gamma \setminus E$, то для некоторого $N$ при $n > N$ будет $\zeta \notin G_n$, и, следовательно, по свойству 4) $|g_n(\zeta)| < 1/2^n$. Отсюда
$$|\sum_{k=1}^n g_n(\zeta)| < N + 1\,.$$

Это показывает, что $\lim_{n\to\infty} f_n(\zeta) = 0$. Таким образом, последовательность $f_n(\zeta)$ сходится на $\Gamma$ к характеристической функции $\chi_E(\zeta)$ множества $E$ и $\chi_E \in A^2_\Gamma$.

Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Покажем сначала, что всякая функция $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, из бэровского класса выше первого, имеющая нулевые моменты $c_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$, представима в виде суммы двух функций: функции, эквивалентной нулю из того же класса Бэра и функции из класса $A^2_\Gamma$.

Действительно, функция $f(\zeta)$ почти всюду на $\Gamma$ совпадает с граничными значениями некоторой функции $g(z)$, ограниченной и аналитической в $D$. Множество всех точек, в которых $g(z)$ не имеет радиальных пределов, имеет меру нуль и, следовательно, содержится в некотором множестве $E$ типа $G_\delta$ нулевой меры: $E(g) \subset E$, $mes\, E = 0$. По лемме 3 существует равномерно ограниченная последовательность функций $f_n(\zeta)$ из класса $A^1_\Gamma$, сходящаяся к характеристической функции множества $E$.

Тогда последовательность $(1 - f_n(\zeta))g((1 - 1/n)\zeta)$ принадлежит классу $A^1_\Gamma$, равномерно ограничена на $\Gamma$ и сходится к функции $g(\zeta)$, равной 0 на $E$ и равной $g(\zeta)$ на $\Gamma \backslash E$ (напомним, что $g(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, — граничные значения функции $g(z)$ ). Функция $g(\zeta)$ эквивалентна $f(\zeta)$ и принадлежит классу $A^2_\Gamma$. Тогда разность $q(\zeta) = f(\zeta) - g(\zeta)$ — функция того же класса Бэра, что и функция $f$, и эквивалентна нулю. Таким образом, получаем требуемое представление

$$f(\zeta) = q(\zeta) + g(\zeta)\,.$$

Докажем теорему для случая класса $A^2_\Gamma$. В этом случае функция $q(\zeta)$ принадлежит второму классу Бэра и равна нулю почти всюду на $\Gamma$. Возьмем множество $\tilde{E}$ типа $G_\delta$ меры нуль, так, чтобы $q(\zeta) = 0$ на $\Gamma \setminus \tilde{E}$.

По лемме 3 существует равномерно ограниченная последовательность функций $g_n \in A^1_\Gamma$, сходящаяся на $\tilde{E}$ к $q(\zeta)$. По лемме 4 выберем равномерно ограниченную последовательность функций $f_n(\zeta)$ из класса $A^1_\Gamma$, сходящуюся к характеристической функции множества $\tilde{E}$. Последовательность произведений $g_n(\zeta)f_n(\zeta)$ принадлежит классу $A^1_\Gamma$, равномерно ограничена на $\Gamma$ и сходится к $q(\zeta)$ на $\tilde{E}$ и к нулю на $\Gamma \setminus \tilde{E}$. Так как, по построению, $q(\zeta) = 0$ на $\Gamma \setminus \tilde{E}$, то последовательность $g_n(\zeta)f_n(\zeta)$ сходится к $q(\zeta)$ всюду на $\Gamma$, т.е. $q(\zeta) \in A^2_\Gamma$, а значит и функция $f(\zeta) \in A^2_\Gamma$.

Предположим теперь, что $\alpha > 2$ — некоторое порядковое число не выше второго класса и что для всех классов $A^\beta_\Gamma$, $\beta < \alpha$, теорема 2 уже доказана. Для того, чтобы показать, что теорема верна и для класса $A^\alpha_\Gamma$, достаточно показать, что функция $q(\zeta)$ принадлежит классу $A^\alpha_\Gamma$.

Пусть снова $\tilde{E}$ — множество типа $G_\delta$, вне которого $q(\zeta) = 0$, а $\chi(\zeta)$ — характеристическая функция множества $\tilde{E}$. Так как $q(\zeta)$ — ограниченная функция из $\alpha$-класса Бэра, то существует равномерно ограниченная последовательность функций $q_n$, принадлежащих, соответственно, классам Бэра с индексами $\beta_n < \alpha$, сходящаяся на $\Gamma$ к $q(\zeta)$.

Поскольку, по лемме 4, $\chi(\zeta)$ принадлежит классу $A^2_\Gamma$, то произведение $\chi(\zeta)q_n(\zeta)$ будет из того же класса Бэра, что и $q_n(\zeta)$. По предположению о том, что теорема 2 верна для всех классов $A^\beta_\Gamma$, $\beta < \alpha$, следует, что $\chi(\zeta)q_n(\zeta)$ принадлежит классу $A_\Gamma^{\beta_n}$. Поскольку

$$f(\zeta) = \lim_{n\to\infty} q(\zeta)f_n(\zeta),$$

то $f(\zeta) \in A_\Gamma^\alpha$.

Теорема доказана.

## Библиографический список

1. *Келдыш М. В.* Sur les suites de polynômes bornes dans leur ensemble // Матем. сб. 1935. Т. 42 (84). № 6.
2. *Колесников С. В.* Об одной теореме М. В. Келдыша, касающейся поточечной сходимости последовательности полиномов // Матем. сб. 1984. Т. 124 (166). № 4(8).
3. *Колесников С. В.* О множествах несуществования радиальных пределов ограниченных аналитических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 4.
4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., 1974.