Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2000 С. 129 – 140

Д. И. Молдаванский

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОНЕЧНЫМИ *P*-ГРУППАМИ *HNN*-РАСШИРЕНИЙ

Получен критерий аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения, базовая группа которого является конечной p-группой, и доказано основанное на этом критерии достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами произвольных HNN-расширений. С помощью этих результатов получены необходимые и достаточные условия аппроксимируемости конечными p-группами для групп, входящих в два известных класса групп с одним определяющим соотношением.

The criterion for HNN-extension with a finite p-group base to be residually a finite p-group is given and the sufficient condition for any HNN-extensions to be residually a finite p-group based on this criterion is proved. These results are applied to describe all groups from two classes of one-relator groups which are residually a finite p-group.

УДК 512.543; ББК 22.144.12.

1. Введение. Формулировка результатов

Практически все известные результаты о финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с объединенными подгруппами получены с помощью предложенной Г. Баумслагом в работе [5] методики, основанной на доказанной в этой работе финитной аппроксимируемости свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных групп и использующей введенное там же понятие совместимых подгрупп. Затем эта методика была перенесена на конструкцию HNN-расширений групп: финитная аппроксимируемость HNN-расширения конечной группы установлена независимо в работах [4] и [8] , причем в работе [4] приведено и достаточное условие финитной аппроксимируемости HNN-расширения бесконечной группы, аналогичное соответствующему условию из [5]. Критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных p-групп был получен Г. Хигменом [9], и основанная на этом критерии определенная модификация понятия совместимых подгрупп приводит к аналогичной методике исследования аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений с объединенной подгруппой произвольных групп (см. [2]).

Основной целью данной статьи является получение критерия аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения, базовая группа которого является конечной p-группой (теорема 1), и доказательство основанного на этом критерии достаточного условия аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширений с бесконечной базовой группой (теорема 2). В качестве иллюстрации применения этих результатов получены необходимые и достаточные условия аппроксимируемости конечными p-группами для групп, входящих в два известных класса групп с одним определяющим соотношением (теоремы 3 и 4).

Сформулируем результаты работы более подробно. Напомним, что главным рядом некоторой группы G называется ее нормальный ряд, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений. Нетрудно видеть, что нормальный ряд конечной p-группы является главным в точности тогда, когда все его факторы имеют порядок p.

Теорема 1. *Пусть G — конечная p-группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Соответствующее HNN-расширение $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ является группой, аппроксимируемой конечными p-группами, тогда и только тогда, когда существует главный ряд*

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \dots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$$

группы G, удовлетворяющий следующим двум условиям:

(1) *$(A \cap G_i)\varphi = B \cap G_i$ $(i = 0, 1, \dots, n)$;*
(2) *для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$ и для каждого элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ элементы $a\varphi$ и a сравнимы по модулю подгруппы G_i.*

Эта теорема была анонсирована в [3]. Следует отметить, что критерий аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения конечной p-группы, сформулированный в других терминах, был получен также в работе [12]. Тем не менее критерий, содержащийся в теореме 1, является, на наш взгляд, более удобным для изучения аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширений с бесконечной базовой группой. Заметим еще, что доказательство теоремы 1 является совершенно элементарным в том смысле, что в нем используются лишь обычные свойства конструкции HNN-расширения. С помощью аналогичных рассуждений можно доказать и упомянутую выше теорему Г. Хигмена. Здесь уместно напомнить, что оригинальное доказательство теоремы Г. Хигмена, как и соответствующего результата из [12], использует конструкцию сплетения групп.

Из теоремы Г. Хигмена следует, в частности, что свободное произведение с объединенными подгруппами двух конечных p-групп всегда будет группой, аппроксимируемой конечными p-группами, если объединяемые подгруппы являются циклическими. Следующий простой пример показывает, что, в отличие от этого, цикличность подгрупп A и B не гарантирует аппроксимируемость группы $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ конечными p-группами.

Рассмотрим HNN-расширение $H^* = (H, t;\ t^{-1}at = b^p)$ группы

$$H = \langle a, b;\ a^{-1}ba = b^{1+p},\ a^p = 1,\ b^{p^2} = 1\rangle$$

порядка p^3, где связанные подгруппы A и B порождены элементами a и b^p соответственно. Если предположить, что группа H^* аппроксимируема конечными p-группами, то пересечение всех членов $\gamma_n(H^*)$ ее нижнего центрального ряда должно совпадать с единичной подгруппой, и потому можно выбрать номер n так, чтобы $a \in \gamma_n(H^*) \setminus \gamma_{n+1}(H^*)$. Но тогда имеют место сравнения $b \equiv b^{1+p} \pmod{\gamma_{n+1}(H^*)}$ и $a \equiv b^p \pmod{\gamma_{n+1}(H^*)}$, из которых следует, что $a \in \gamma_{n+1}(H^*)$. (Условия из теоремы 1 здесь не выполняются, т. к. $A \cap B = 1$, а первый неединичный член любого главного ряда группы H должен совпадать с ее центром B.)

Уместно ожидать, что в случае, когда подгруппы A и B являются циклическими, существует более простой критерий аппроксимируемости группы G^* конечными p-группами. Так, если подгруппы A и B совпадают, имеем

Следствие. *Пусть G — конечная p-группа, A — неединичная циклическая подгруппа группы G, порожденная элементом a, и φ — автоморфизм группы A такой, что $a\varphi = a^k$ для некоторого целого числа k (взаимно простого с p). Группа $G^* = (G, t;\ t^{-1} a\, t = a^k)$ является аппроксимируемой конечными p-группами тогда и только тогда, когда $k \equiv 1 \pmod{p}$.*

В самом деле, если $1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$ — произвольный главный ряд группы G, то различные члены последовательности $(A \cap G_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ составляют единственный главный ряд группы A. Отсюда $(A \cap G_i)\varphi = A \cap G_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$. Если $a \in (A \cap G_{i+1}) \setminus G_i$, то поскольку порядок элемента aG_i фактор-группы G/G_i равен p, из равенства $(a\varphi)G_i = aG_i$ следует, что $k \equiv 1 \pmod{p}$. Обратно, если $k \equiv 1 \pmod{p}$, то очевидно, что произвольный главный ряд группы G удовлетворяет и условию (2) теоремы 1.

Для дальнейшего необходимо напомнить ряд понятий и результатов, восходящих к работе [5] и используемых в настоящее время практически во всех исследованиях аппроксимационных свойств HNN-расширений.

Семейство $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ нормальных подгрупп некоторой группы G называется фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1$. Пусть H — подгруппа группы G. Если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HN_\lambda = H$, то фильтрация $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ называется H-фильтрацией. Если H и K — две подгруппы группы G, то эту фильтрацию будем называть (H, K)-фильтрацией, если она одновременно является и H-фильтрацией, и K-фильтрацией.

Пусть теперь G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Подгруппа H группы G называется (A, B, φ)-совместимой, если $(A \cap H)\varphi = B \cap H$. (Таким образом, условие (1) в формулировке теоремы 1 означает (A, B, φ)-совместимость всех подгрупп G_i.) Легко видеть, что если H — нормальная (A, B, φ)-совместимая подгруппа группы G, то отображение $\varphi_{_H} : AH/H \to BH/H$, (корректно) определяемое правилом $(aH)\varphi_{_H} = (a\varphi)H$ (где $a \in A$), является изоморфизмом подгруппы AH/H фактор-группы G/H на ее подгруппу BH/H. Кроме того, естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/H может быть продолжен до гомоморфизма $\rho_{_H}$ HNN-расширения $G^* = (G, t;\ t^{-1} A\, t = B, \varphi)$ на HNN-расширение

$$G^*_H = (G/H, t;\ t^{-1} AH/H\, t = BH/H,\ \varphi_{_H}).$$

Пусть $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ обозначает семейство всех (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Упомянутое выше достаточное условие финитной аппроксимируемости HNN-расширения G^* группы G состоит в требовании, чтобы семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ являлось (A, B)-фильтрацией. Для формулировки аналогичного условия аппроксимируемости HNN-расширений конечными p-группами приведем соответствующую модификацию понятия (A, B, φ)-совместимости, основанную на теореме 1.

Пусть по-прежнему G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть p — простое число. Подгруппу H группы G будем называть (A, B, φ, p)-совместимой, если существует последовательность

$$H = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$$

подгрупп группы G такая, что

1) для любого $i = 0, 1, \ldots, n$ G_i является нормальной (A, B, φ)-совместимой подгруппой группы G и

2) для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ порядок фактор-группы G_{i+1}/G_i равен p и для произвольного элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ элементы $a\varphi$ и a сравнимы по модулю подгруппы G_i.

Пусть $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ обозначает семейство всех (A, B, φ, p)-совместимых подгрупп группы G. Теорема 1 фактически утверждает, что если G конечная p-группа, то HNN-расширение $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ является группой, аппроксимируемой конечными p-группами, тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ содержит единичную подгруппу.

Следующую теорему, содержащую достаточное условие аппроксимируемости HNN-расширений конечными p-группами, можно рассматривать и как подтверждение того, что понятие (A, B, φ, p)-совместимости действительно является p-аналогом понятия (A, B, φ)-совместимости.

Теорема 2. *Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ — HNN-расширение группы G. Тогда*

(1) *если группа G^* аппроксимируема конечными p-группами, то семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является фильтрацией;*
(2) *если семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, то группа G^* аппроксимируема конечными p-группами.*

В том случае, когда группа G абелева, а A и B являются собственными подгруппами группы G, можно утверждать несколько большее. Пусть $g \in G \setminus A$ и $h \in G \setminus B$. Тогда коммутатор $u = [t^{-1}gt, h]$ имеет в группе G^* приведенную запись вида $u = t^{-1}g^{-1}t\,h^{-1}\,t^{-1}gt\,h$ и, следовательно, отличен от единицы. Если группа G^* аппроксимируема конечными p-группами, то некоторая нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G^* не содержит элемента u. Так как фактор-группа G/M абелева, отсюда следует, что $g \notin AM$, где $M = G \cap N$. Поскольку подгруппа M является (A, B, φ, p)-совместимой (см. лемму 2.3 ниже), имеет место

Следствие. *Если группа G абелева, а A и B — собственные подгруппы группы G, то группа G^* аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией.*

Рассмотрим теперь два класса групп с одним определяющим соотношением. Первый из них — класс групп Баумслага – Солитэра, т. е. групп вида $G(l, m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^l b = a^m\rangle$, где без потери общности можно считать, что $|m| \geqslant l > 0$. Хорошо известно (см. [6, 11]), что группа $G(l, m)$ является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $l = 1$ или $|m| = l$.

Второй класс состоит из некоторых HNN-расширений групп Баумслага – Солитэра, а именно из групп вида

$$H(l, m;\ k) = \langle a, t;\ t^{-1}a^{-k}t\, a^l\, t^{-1}a^k t = a^m\rangle$$
$$= \langle a, b, t;\ b^{-1}a^l\, b = a^m,\ t^{-1}a^k\, t = b\rangle,$$

где (снова без потери общности) мы предполагаем, что $|m| \geqslant l > 0$ и $k > 0$. Некоторые свойства групп этого интересного класса были установлены А. М. Бруннером [7] (см. также [1]). Доказано, в частности, что группа $H(l, m;\ k)$ является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $|m| = l$.

С помощью теоремы 2 здесь будут доказаны следующие утверждения:

Теорема 3. *Группа $G(l, m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^l b = a^m\rangle$ (где $|m| \geqslant l > 0$) аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда или $l = 1$ и $m \equiv 1 \pmod p$, или $|m| = l = p^r$ для некоторого $r \geqslant 0$, причем если $m = -l$, то $p = 2$.*

Теорема 4. *Группа $H(l, m;\ k) = \langle a, t;\ t^{-1}a^{-k}t\, a^l\, t^{-1}a^k t = a^m\rangle$ (где $|m| \geqslant l > 0$ and $k > 0$) аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда $|m| = l = p^r$ и $k = p^s$ для некоторых целых чисел $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$, причем если $m = -l$, то $p = 2$ и $s \leqslant r$.*

2. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1 начнем с простого и хорошо известного (см., напр., [12]; предложение 1) замечания:

Лемма 2.1. *Пусть G — некоторая конечная p-группа, $A, B \leqslant G$ и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\, t = B, \varphi)$ аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм ρ группы G^* на некоторую конечную p-группу X такой, что $Ker\, \rho \cap G = 1$.*

В самом деле, часть "только тогда" формулировки леммы очевидна ввиду конечности группы G. Обратно, если $\mathrm{Ker}\, \rho \cap G = 1$, то (см. [10]) подгруппа $\mathrm{Ker}\, \rho$ свободна. Следовательно, группа G^* является расширением свободной группы при помощи конечной p-группы и потому аппроксимируема конечными p-группами.

Предположим теперь, что HNN-расширение $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B, \varphi)$ конечной p-группы G является группой, аппроксимируемой конечными p-группами. Тогда в соответствии с леммой 2.1 мы можем считать группу G подгруппой некоторой конечной p-группы X, обладающей таким элементом x, что $x^{-1}ax = a\varphi$ для всех $a \in A$. Пусть

$$1 = X_0 \leqslant X_1 \leqslant \cdots \leqslant X_{n-1} \leqslant X_n = X$$

— некоторый главный ряд группы X и $G_i = G \cap X_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда различные члены последовательности G_0, G_1, … , G_{n-1}, G_n составляют главный ряд группы G. Так как $A \cap G_i = A \cap X_i$ и $B \cap G_i = B \cap X_i$, то

$$(A \cap G_i)\varphi = (A \cap X_i)\varphi = (A \cap X_i)^x = A^x \cap X_i = B \cap X_i = B \cap G_i.$$

Пусть ψ — вложение фактор-группы G/G_i в фактор-группу X/X_i, переводящее смежный класс gG_i в смежный класс gX_i. Так как подгруппа $(G_{i+1}/G_i)\psi$ содержится в центральной подгруппе X_{i+1}/X_i группы X/X_i, то для любого элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ имеем

$$(aG_i)\psi = aX_i = a^x X_i = (a\varphi)X_i = ((a\varphi)G_i)\psi.$$

Поскольку отображение ψ инъективно, отсюда следует, что $(a\varphi)G_i = aG_i$. Таким образом, построенный главный ряд группы G удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы 1.

Обратно, предположим, что некоторый главный ряд

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$$

группы G удовлетворяет условиям (1) и (2) из формулировки теоремы 1. Покажем индукцией по n, что существует такой гомоморфизм группы G^* на некоторую конечную p-группу X, действие которого на подгруппе G инъективно (что ввиду леммы 2.1 и будет означать аппроксимируемость группы G^* конечными p-группами).

Легко видеть, что при $n = 1$ в качестве группы X можно взять прямое произведение группы G и циклической группы порядка p с порождающим x; требуемое отображение действует тождественно на группе G и переводит элемент t в элемент x.

Пусть $n > 1$. Так как $(A \cap G_1)\varphi = B \cap G_1$ и порядок подгруппы G_1 равен p, имеются лишь следующие две возможности:
a) $G_1 \leqslant A$ и $G_1 \leqslant B$;
b) $A \cap G_1 = B \cap G_1 = 1$.

В случае a) полагаем $\overline{G} = G/G_1$, $\overline{G}_i = G_i/G_1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\overline{A} = A/G_1$ и $\overline{B} = B/G_1$. Тогда $1 = \overline{G}_1 \leqslant \overline{G}_2 \leqslant \cdots \leqslant \overline{G}_{n-1} \leqslant \overline{G}_n = \overline{G}$ — главный ряд группы $\overline{G}$. Так как подгруппа G_1 (A, B, φ)-совместима, отображение $\overline{\varphi} = \varphi_{G_1}$ является изоморфизмом подгруппы $\overline{A}$ на подгруппу $\overline{B}$. Кроме того, так как $\overline{A} \cap \overline{G}_i = (A \cap G_i)/G_1$ и $\overline{B} \cap \overline{G}_i = (B \cap G_i)/G_1$, имеем $(\overline{A} \cap \overline{G}_i)\overline{\varphi} = \overline{B} \cap \overline{G}_i$. Непосредственно проверяется также, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и любого элемента $aG_1 \in \overline{A} \cap \overline{G}_{i+1}$ смежные классы aG_1 и $(aG_1)\overline{\varphi}$ сравнимы по подгруппе $\overline{G}_i$. Следовательно, по индуктивному предположению существует гомоморфизм σ группы $\overline{G}^* = (\overline{G}, t;\ t^{-1}\overline{A}\,t = \overline{B}, \overline{\varphi})$ на некоторую конечную p-group X такой, что $\operatorname{Ker}\sigma \cap \overline{G} = 1$.

Пусть $\rho = \rho_{G_1}$ — гомоморфизм группы G^* на группу $\overline{G}^*$, продолжающий естественное отображение группы G на фактор-группу $\overline{G}$, и пусть $L = \operatorname{Ker}(\rho\sigma)$. Тогда $\operatorname{Ker}\rho = G_1$, $G^*/L \simeq X$ и $G \cap L = G_1$. Кроме того, поскольку $L/G_1 \simeq \operatorname{Ker}\sigma$ и группа $\operatorname{Ker}\sigma$ свободна, существует свободная подгруппа F группы L такая, что $L = FG_1$ и $F \cap G_1 = 1$. Так как из условия (2) следует, что подгруппа G_1 лежит в центре группы G^*, имеем $L = F \times G_1$. Пусть N обозначает пересечение всех нормальных подгрупп индекса p группы L. Тогда N содержится в F и является нормальной подгруппой группы G, поскольку она характеристична в L. Кроме того, фактор-группа L/N является конечной p-группой, поскольку группа L, будучи подгруппой конечного индекса конечно порожденной группы G^*, является конечно порожденной. Наконец, $N \cap G = N \cap L \cap G = N \cap G_1 = N \cap F \cap G_1 = 1$. Таким образом, естественный гомоморфизм группы G^* на фактор-группу G^*/N является искомым.

В случае b) положим $A_1 = AG_1$ и $B_1 = BG_1$. Так как G_1 является центральной подгруппой группы G, то $A_1 = A \times G_1$ и $B_1 = B \times G_1$. Поэтому отображение $\varphi_1 : A_1 \to B_1$, которое переводит элемент $g \in A_1$, $g = ax$, где $a \in A$ и $x \in G_1$, в элемент $(a\varphi)x$, является изоморфизмом. Поскольку $A_1 \cap G_i = (A \cap G_i)G_1$ и $B_1 \cap G_i = (B \cap G_i)G_1$, очевидно имеем $(A_1 \cap G_i)\varphi_1 = B_1 \cap G_i$. Кроме того, если элемент $g = ax$ (где $a \in A$ и $x \in G_1$) принадлежит подгруппе $A_1 \cap G_{i+1} = (A \cap G_{i+1})G_1$, то $a \in A \cap G_{i+1}$, и потому $(g\varphi_1)G_i = (a\varphi)xG_i = (a\varphi)G_i \cdot xG_i = aG_i \cdot xG_i = gG_i$. Поэтому ввиду рассмотренного случая a) существует гомоморфизм σ группы

$$G_1^* = (G, t;\ t^{-1}A_1 t = B_1, \varphi_1)$$

на некоторую конечную p-группу X, действующий инъективно на подгруппе G. Так как изомофизм φ совпадает с ограничением на подгруппу A изоморфизма φ_1, тождественное отображение группы G может быть продолжено до гомоморфизма $\rho : G^* \to G_1^*$. Тогда гомоморфизм $\rho\sigma$ отображает группу G^* на группу X и инъективен на G. Тем самым завершен индуктивный шаг, и теорема 1 доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм.

Лемма 2.2. а) *Произвольная нормальная (A, B, φ)-совместимая подгруппа H группы G принадлежит семейству $\mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$ тогда и только тогда, когда группа G_H^* аппроксимируема конечными p-группами.*

б) *Пусть N — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B, \varphi)$ и $M = G \cap N$. Тогда $M \in \mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$.*

в) *Семейство $\mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$ замкнуто относительно конечных пересечений.*

Доказательство всех утверждений леммы 2.2 не вызывает особых затруднений. Справедливость пункта а) вытекает из рассмотрения соответствия между последовательностями подгрупп группы G в определении (A, B, φ, p)-совместимости и главными рядами фактор-группы G/H. Пункт б) является непосредственным следствием пункта а) и леммы 2.1. Для доказательства пункта в) достаточно заметить, что если подгруппы

H и K принадлежат семейству $\mathcal{F}^p_G(A,B,\varphi)$ и $L = H \cap K$, то существует гомоморфизм ρ группы G^*_L в прямое произведение $G^*_H \times G^*_K$, инъективный на подгруппе G/L.

Утверждение (1) теоремы 2 очевидным образом следует из пункта б) леммы 2.2. Докажем утверждение (2). Ввиду пункта а) леммы 2.2 нам достаточно показать, что для любого неединичного элемента w группы G^* найдется подгруппа $H \in \mathcal{F}^p_G(A,B,\varphi)$ такая, что $w\rho_{_H} \neq 1$. Если элемент w принадлежит подгруппе G, то существование подгруппы H обеспечивается тем, что семейство $\mathcal{F}^p_G(A,B,\varphi)$ является фильтрацией. Пусть приведенная запись элемента w имеет вид $w = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots t^{\varepsilon_n} g_n$, где $n \geqslant 1$. Это означает, что для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$ из того, что $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$, следует, что при $\varepsilon_i = -1$ $g_i \notin A$, а при $\varepsilon_i = 1$ $g_i \notin B$. Из предположения о том, что семейство $\mathcal{F}^p_G(A,B,\varphi)$ является (A,B)-фильтрацией, и пункта в) леммы 2.4 легко следует существование такой подгруппы $H \in \mathcal{F}^p_G(A,B,\varphi)$, что для любого элемента g_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ $g_i \notin AH$, если $g_i \notin A$, и $g_i \notin BH$, если $g_i \notin B$. Это означает, что запись $(g_0H)t^{\varepsilon_1}(g_1H)t^{\varepsilon_2}(g_2H)\cdots t^{\varepsilon_n}(g_nH)$ элемента $w\rho_{_H}$ является приведенной, и потому $w\rho_{_H}$ отличен от единицы. Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теорем 3 и 4

Группа $G(l,m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^l b = a^m \rangle$ является HNN-расширением бесконечной циклической группы A, порожденной элементом a, с проходной буквой b, связанными подгруппами A^l и A^m и изоморфизмом φ, переводящим элемент a^l в элемент a^m. Если эта группа является аппроксимируемой конечными p-группами, то она финитно аппроксимируема и потому, как отмечено выше, $l = 1$ или $|m| = l$ (напомним, что мы предполагаем выполнение неравенств $|m| \geqslant l > 0$).

Предположим сначала, что $l = 1$ и существует такой гомоморфизм ρ группы $G(1,m)$ на конечную p-группу X, что $a\rho \neq 1$. Так как ρ проходит через группу
$$G_s(1,m) = \langle a, b;\ b^{-1}ab = a^m,\ a^{p^s} = 1 \rangle,$$
где p^s есть порядок элемента $a\rho$ группы X, то существует гомоморфизм HNN-расширения $G_s(1,m)$ циклической группы A/A^{p^s} порядка p^s на конечную p-группу X, действующий на базовой группе инъективно. По лемме 2.1 группа $G_s(1,m)$ аппроксимируема конечными p-группами, и потому ввиду следствия из теоремы 1 должно выполняться сравнение $m \equiv 1 \pmod p$.

Обратно, если сравнение $m \equiv 1 \pmod p$ имеет место и потому (ввиду того же следствия) произвольная группа вида $G_s(1,m)$ аппроксимируема конечными p-группами, то и группа $G(1,m)$ аппроксимируема конечными p-группами, поскольку она, как легко видеть, аппроксимируема семейством групп $G_s(1,m)$ $(s = 1, 2, \dots)$.

Если $l > 1$ (и $|m| = l$), то к группе $G(l,m)$ применимо следствие из теоремы 2, в соответствии с которым эта группа аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}^p_A(A^l, A^m, \varphi)$ является (A^l, A^m)-фильтрацией.

Запишем число l в виде $l = l_1 p^r$, где $r \geqslant 0$ и $(l_1, p) = 1)$. Очевидно, что если подгруппа A^k группы A является (A^l, A^m, p)-совместимой, то k должно быть p-числом. Легко также видеть, что при $m = l$ произвольная подгруппа вида A^{p^s} (A^l, A^m, p)-совместима, а при $m = -l$ и $s > r$ подгруппа A^{p^s} является (A^l, A^m, p)-совместимой тогда и только тогда, когда $p = 2$. Заметим еще, что если целые числа x и y таковы, что $l_1 x + p^s y = 1$, то имеет место равенство $a^{p^r} = (a^l)^x \cdot (a^{p^s})^{p^r y}$, означающее, что $a^{p^r} \in A^l \cdot A^{p^s}$. Таким образом, семейство $\mathcal{F}^p_A(A^l, A^m, \varphi)$ является (A^l, A^m)-фильтрацией тогда и только тогда, когда $l = p^r$ для некоторого $r \geqslant 0$, причем если $m = -l$, то $p = 2$. Теорема 3 доказана.

Переходя к доказательству теоремы 4, предположим сначала, что группа $H(l, m;\, k) = \langle a, b, t;\ b^{-1}a^l b = a^m,\ t^{-1}a^k t = b\rangle$, где $|m| \geqslant l > 0$ и $k > 0$, аппроксимируема конечными p-группами. Тогда (см. [10]) $|m| = l$, и так как группа $H(l, m;\, k)$ содержит подгруппу $G(l, m)$, из теоремы 3 следует, что $|m| = l = p^r$ для некоторого $r \geqslant 0$, причем если $m = -l$, то $p = 2$.

Запишем число k в виде $k = p^s k_1$, где $s \geqslant 0$ и $(k_1, p) = 1$. Если $k_1 > 1$, то t-приведенная запись элемента $w = [t^{-1}a^{-p^s}t\, a^l t^{-1} a^{p^s} t, a]$ группы $H(l, m;\, k)$ имеет длину 8, и потому $w \neq 1$. С другой стороны, пусть N — такая нормальная подгруппа группы $H(l, m;\, k)$, что $a^{p^n} \in N$ для некоторого $n \geqslant 0$. Тогда $a^{p^s} \equiv a^{kc} \pmod N$, где c — целое число, удовлетворяющее сравнению $k_1 c \equiv 1 \pmod{p^n}$. Отсюда (учитывая, что $(m = \varepsilon l,\ \varepsilon = \pm 1)$ имеем $t^{-1}a^{p^s}t \equiv b^c \pmod N$ и $t^{-1}a^{-p^s}t\, a^{p^r} t^{-1} a^{p^s} t \equiv a^{\varepsilon^c p^r}$ $\pmod N$, и потому $w \in N$. Следовательно, w лежит в каждой нормальной подгруппе конечного p-индекса группы $H(l, m;\, k)$, что противоречит ее аппроксимируемости конечными p-группами. Таким образом, $k = p^s$.

Пусть σ — такой гомоморфизм группы $H(2^r, -2^r;\, 2^s)$ на конечную p-группу X, что $b\sigma \neq 1$, $1 = X_0 \leqslant X_1 \leqslant \cdots \leqslant X_n = X$ — некоторый главный ряд группы X и $b\sigma \in X_{i+1} \setminus X_i$. Так как подгруппа X_{i+1}/X_i лежит в центре фактор-группы X/X_i, имеем $(a\sigma)^{2^r} \equiv (a\sigma)^{-2^r} \pmod{X_i}$ и $(a\sigma)^{2^s} \equiv b\sigma \pmod{X_i}$. Поэтому элемент $(a\sigma)^{2^{r+1}}$ принадлежит, а элемент $(a\sigma)^{2^s}$ не принадлежит подгруппе X_i, откуда и следует неравенство $s \leqslant r$.

Обратно, покажем, что для любого простого числа p и произвольных целых чисел $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$ группа $H(p^r, \varepsilon p^r;\, p^s)$ (где $\varepsilon = \pm 1$ и если $\varepsilon = -1$, то $p = 2$ и $s \leqslant r$) аппроксимируема конечными p-группами.

Пусть G — группа вида $\langle a, b;\ b^{-1}a^{p^r}b = a^{\varepsilon p^r}\rangle$. Пусть также A и B — подгруппы группы G, порождаемые элементами a и b соответственно, и $A_1 = A^{p^s}$. Тогда группа $H(p^r, \varepsilon p^r;\, p^s)$ является HNN-расширением $(G, t;\ t^{-1}A_1 t = B,\ \varphi)$, где изоморфизм φ определен равенством $a^{p^s}\varphi = b$.

Ввиду теоремы 2 достаточно показать, что семейство $\mathcal{F}^p_G(A_1, B, \varphi)$ является (A_1, B)-фильтрацией. Тем не менее мы начнем с доказательства несколько более слабого утверждения:

Лемма 3.1. *Семейство всех нормальных (A_1, B)-совместимых подгрупп конечного p-индекса группы G является (A_1, B)-фильтрацией.*

Доказательство. Очевидно, что группа G раскладывается в свободное произведение с объединенной подгруппой, $G = (A * K;\ a^{p^r} = c)$, групп A и $K = \langle b, c;\ b^{-1}cb = c^{\varepsilon}\rangle$. Для произвольного целого числа $n > \max(r, s)$ обозначим через L_n подгруппу группы K, порожденную элементами $b^{p^{n-s}}$ и $c^{p^{n-r}}$. Так как при $\varepsilon = -1$ $p = 2$, в любом случае L_n является нормальной подгруппой группы K. Очевидно также, что порядок фактор-группы K/L_n равен p^{2n-r-s}, а ее элементы bL_n и cL_n имеют порядки p^{n-s} и p^{n-r} соответственно. Поэтому можно построить свободное произведение с объединенной подгруппой $G_n = (A/A^{p^n} * K/L_n;\ (aA^{p^n})^{p^r} = cL_n)$.

Пусть ρ_n — гомоморфизм группы G на группу G_n, продолжающий естественные отображения A на A/A^{p^n} и K на K/L_n. Для любого элемента $g \in G$, такого, что или $g \neq 1$, или $g \notin A_1$, или $g \notin B$, существует число n, для которого или $g\rho_n \neq 1$, или $g\rho_n \notin A_1\rho_n$, или $g\rho_n \notin B\rho_n$ соответственно. Это очевидно, если $g \in A$ или $g \in K$. Более того, в этих двух случаях справедливо и следующее утверждение: если элемент g не принадлежит объединяемой подгруппе разложения группы G, то для всех достаточно больших n элемент $g\rho_n$ не будет принадлежать объединяемой подгруппе разложения группы G_n. Отсюда следует, что если несократимая запись элемента g имеет длину > 1, то для подходящего n ту же длину имеет и несократимая запись элемента $g\rho_n$. Поэтому такой элемент отличен от 1 и не входит ни в подгруппу $A_1\rho_n$, ни в подгруппу $B\rho_n$.

Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G, и пусть целое число n выбрано так, что $g\rho_n \neq 1$. Поскольку ввиду теоремы Хигмена группа G_n аппроксимируема конечными p-группами, а подгруппы A/A^{p^n} и K/L_n группы G_n конечны, существует такая нормальная подгруппа M конечного p-индекса группы G_n, что $g\rho_n \notin M$ и $A/A^{p^n} \cap M = K/L_n \cap M = 1$. Пусть $N = M\rho_n^{-1}$. Тогда N не содержит элемента g и, как легко видеть, является нормальной (A_1, B, φ)-совместимой подгруппой конечного p-индекса группы G. Рассуждая аналогично, можно показать, что если элемент g не входит в подгруппу A_1 или в подгруппу B, то подгруппу N можно выбрать так, что элемент g не будет принадлежать подгруппе A_1N или подгруппе BN соответственно.

Лемма 3.2. *Для произвольного целого числа $n > s$ существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G такая, что $A \cap N = A^{p^n}$, $B \cap N = B^{p^{n-s}}$ и $a^{p^{n-1}} \equiv b^{p^{n-s-1}} \pmod N$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $n > r$. Сохраняя все обозначения из доказательства леммы 3.1, рассмотрим еще циклическую подгруппу D группы K, порождаемую элементом $d = c^{p^{n-r-1}}b^{-p^{n-s-1}}$. Если при $\varepsilon = -1$ потребовать выполнения неравенства $n - s - 1 > 0$, то в любом случае DL_n/L_n будет центральной подгруппой порядка p группы K/L_n, а элементы $c(DL_n)$ и $b(DL_n)$ фактор-группы K/DL_n будут иметь порядки p^{n-r} и p^{n-s} соответственно. Так как группа $G'_n = (A/A^{p^n} * K/DL_n;\ (aA^{p^n})^{p^r} = c(DL_n))$ аппроксимируема конечными p-группами, то в ней найдется такая нормальная подгруппа M конечного p-индекса, что $A/A^{p^n} \cap M = K/DL_n \cap M = 1$. Тогда прообраз N подгруппы M относительно очевидного гомоморфизма группы G на группу G'_n будет искомой подгруппой.

Если же $\varepsilon = -1$ и $n - s - 1 = 0$, то ввиду неравенств $n > r$ и $s \leqslant r$ имеем $s = r$ и $n = r + 1$. В этом случае искомой подгруппой N будет ядро гомоморфизма σ группы G на циклическую группу X порядка 2^{r+1}, порожденную элементом x, при котором $a\sigma = x$ и $b\sigma = x^{2^r}$.

Наконец, если $n \leqslant r$, то группа G гомоморфно отображается на группу $T = \langle a, b;\ a^{p^n} = 1,\ b^{p^{n-s}} = 1,\ a^{p^{n-1}} = b^{p^{n-s-1}}\rangle$, также аппроксимируемую конечными p-группами, и искомая подгруппа N снова может быть определена как прообраз нормальной подгруппы конечного p-индекса группы T, тривиально пересекающейся со свободными множителями.

Теперь мы можем доказать утверждение, упомянутое выше, и тем самым закончить доказательство теоремы 4.

Лемма 3.3. *Семейство* $\mathcal{F}^p_G(A_1, B, \varphi)$ *является* (A_1, B)*-фильтрацией.*

Доказательство. Покажем, что произвольная (A_1, B)-совместимая подгруппа N конечного p-индекса группы G, удовлетворяющая условию $n > s$, где целое число n определяется равенством $A \cap N = A^{p^n}$, содержит некоторую подгруппу M из семейства $\mathcal{F}^p_G(A_1, B, \varphi)$. Очевидно, что тогда требуемое утверждение будет следовать из леммы 3.1.

Так как неравенства $k < n - s$ и $n - k > s$ равносильны, из леммы 3.2 следует, что для любого целого числа k, $0 \leqslant k < n - s$, в группе G найдется такая нормальная подгруппа N_k конечного p-индекса, что $A \cap N_k = A^{p^{n-k}}$, $B \cap N_k = B^{p^{n-k-s}}$ и $a^{p^{n-k-1}} \equiv b^{p^{n-k-s-1}} \pmod{N_k}$. Считая также, что $N_{n-s} = G$, для каждого $i = 0, 1, \ldots, n - s$ полагаем $M_i = \bigcap_{k=i}^{n-s} N_k$. Утверждается, что подгруппа $M = N \cap M_0$ является искомой. В самом деле, непосредственная проверка показывает, что уплотнив возрастающую последовательность нормальных подгрупп M, M_0, M_1, … , M_{n-s-1}, $M_{n-s} = G$ конечного p-индекса группы G до такой последовательности ее нормальных подгрупп, все факторы которой имеют порядок p, получим последовательность, удовлетворяющую всем требованиям определения (A_1, B, φ, p)-совместимой подгруппы.

Библиографический список

1. *Кавуцкий М. А., Молдаванский Д. И.* Об одном классе групп с одним определяющим соотношением // Алгебраические и дискретные системы: Межвуз. сб. науч. тр. Иваново, 1988.
2. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. N 2.
3. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений конечных p-групп // Тез. докл. 3-й Междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993.
4. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN extensions // Communs in Algebra. 1978. Vol. 6.
5. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106.
6. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68.
7. *Brunner A. M.* On a class of one-relator groups // Can. J. Math. 1980. Vol. 50.
8. *Cohen D.* Residual finiteness and Britton's lemma // J. London Math. Soc.(2). 1977. Vol. 16.
9. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1.

10. *Karrass A., Solitar D.* Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. Vol. 28.
11. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164.
12. *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group // J. of Pure Appl. Algebra 1991. Vol. 76.