Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2000 С. 140 – 148

М. А. Паринов

ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА – МАКСВЕЛЛА И УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА

Введено понятие пространства Эйнштейна – Максвелла как естественной основы для описания электромагнитных полей в присутствии тяготения. Дан обзор результатов по классификации пространств Максвелла и по нахождению первых интегралов уравнений Лоренца методом автора.

We introduce the concept "Einstein — Maxwell space" as a natural base for description of electromagnetic fields in presence of gravity. We present the survey of results on classification of Maxwell spaces and on finding the first integrals of Lorentz equations by the author's method.

УДК 514.83+514.7+517.958; ББК 22.336.

1. Пространства Эйнштейна – Максвелла

В классической теории электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором F_{ij}, удовлетворяющим уравнениям Максвелла

$$\partial_{[i}F_{jk]} = 0, \quad \nabla_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c}J^i \tag{1}$$

[15, § 90], а гравитационное — симметричным тензором (псевдометрикой) g_{ij}, удовлетворяющим уравнениям Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik} \tag{2}$$

[15, § 95]. Все тензоры определены на 4-мерном вещественном многообразии M (пространстве – времени).

Под пространством Эйнштейна – Максвелла будем понимать тройку (M, g, F), где $F = F_{ij}dx^i \wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура на M (уравнение $dF = 0$ эквивалентно первому из уравнений (1)), $g = g_{ij}dx^i dx^j$ — псевдориманова структура на M, где тензор g_{ij} удовлетворяет уравнению Эйнштейна для случая постоянной плотности материи

$$R_{ik} = \kappa g_{ik}. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (проект 97-0-1.3-99).

При этом пара (M, g) есть частный случай пространства Эйнштейна [32]. В случае плоской метрики ((M, g) — пространство Минковского или открытая область в нем) постранство Эйнштейна – Максвелла будем называть пространством Максвелла. Последний термин введен автором в [29].

При выполнении второго из уравнений Максвелла (1) тензор F_{ij} описывает электромагнитное поле, поэтому теория пространств Эйнштейна – Максвелла может служить естественной базой для изучения электромагнитных полей в присутствии тяготения, а теория пространств Максвелла — в отсутствие последнего. При этом, если смотреть на второе уравнение Максвелла как на определение тока, то можно заметить, что не все пространства Эйнштейна – Максвелла допускают физическую интерпретацию. На существование "нефизических" полей F_{ij} указывает, например, возможность для тока J^i иметь сверхсветовую скорость.

Будущая теория пространств Эйнштейна – Максвелла должна быть синтезом идей симплектической геометрии (теории симплектических многообразий) и теории пространств Эйнштейна. Одно из направлений исследований в этой области — классификация пространств Эйнштейна – Максвелла по группам G_S диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих пару полей g_{ij} и F_{ij}. Эта задача сформулирована в [28] как проблема групповой классификации электромагнитных полей при наличии тяготения. Частный случай этой проблемы — классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре (см. разд. 2).

Основные идеи симплектической геометрии изложены, например, в книге [1]. Концепция электромагнитного поля как симплектической структуры разрабатывалась автором в работах [8, 21, 23 – 25, 31]. В первую очередь там рассматривались группы G_F диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих поле F_{ij}. Определены скобки Пуассона в простанстве $\mathcal{F}$ скалярных полей на многообразии M для невырожденных электромагнитных полей, а также их обобщения для случая вырожденных полей F_{ij}. При этом алгебраическая классификация полей F_{ij} (см., напр., [7]) предполагает наличие псевдоримановой метрики g_{ij}, что означает неявное использование понятия пространства Эйнштейна – Максвелла. Введены и описаны 2-мерные инвариантные многообразия (симплектические листы) для вырожденных полей (электростатических, магнитостатических, электромагнитных волн).

2. Групповая классификация пространств Максвелла

В случае отсутствия тяготения пространство (M, g) будет плоским, и группы G_S будут подгруппами группы Пуанкаре. Задача классификации пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре рассматривалась в работах [2, 6, 10, 14, 16 – 18, 28 – 30].

За основу классификации пространств Максвелла взята классификация И. В. Белько подгрупп группы Пуанкаре с точностью до сопряженности [3]. Для каждой из подгрупп G_S находится класс полей F_{ij}, инвариантных относительно нее. Для этого записывается и анализируется система первого из уравнений (1) и

$$L_{\xi_k} F_{ij} = 0, \quad k = 1, \ldots, r = \dim G_S, \tag{4}$$

где ξ_k – базисные векторы алгебры Ли $\mathcal{L}_S$ векторных полей, соответствующей группе G_S. Для некоторых групп G_S классы полей F_{ij} оказываются пустыми. В частности, последнее верно при $\dim G_S > 6$ [34]. В некоторых случаях группа симметрий класса пространств Максвелла оказываеся более широкой, чем группа G_S, для которой этот класс был найден.

Поскольку в отмеченных выше работах (кроме [10]) второе из уравнений (1) не использовалось, следовательно, там были описаны классы пространств Максвелла, допускающие некоторые подгруппы группы Пуанкаре, а не классы электромагнитных полей.

Принципиальных трудностей при классификации пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре не возникает, поскольку описание классов основано на использовании систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных и, следовательно, эти классы представляют собой линейные пространства. С другой стороны, технические сложности могут быть весьма значительными. Наиболее громоздкие вычисления пришлось выполнить в случае пропорциональных бивращений и параболических винтов. При повышении размерности группы G_S описание соответствующих классов пространств Максвелла становится более прозрачным (уменьшается вплоть до нуля число дифференциальных уравнений, необходимых для описания).

Выпишем базис алгебры Ли группы Пуанкаре:

$$\begin{gathered}
e_1 = (1,0,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,0), \quad e_4 = (0,0,0,1), \\
e_{12} = (-x^2, x^1, 0, 0), \quad e_{13} = (x^3, 0, -x^1, 0), \quad e_{23} = (0, -x^3, x^2, 0), \\
e_{14} = (x^4, 0, 0, x^1), \quad e_{24} = (0, x^4, 0, x^2), \quad e_{34} = (0, 0, x^4, x^3).
\end{gathered} \tag{5}$$

В статье [14] описан класс электромагнитных полей (пространств Максвелла), допускающих 1-мерную группу эллиптических винтов, соответствующую векторному полю

$$\xi(x) = e_{13} + \mu e_4 = (x^3, 0, -x^1, \mu) \tag{6}$$

(ось винта – ось времени); в [6] – класс полей F_{ij}, инвариантных относительно 1-мерной группы гиперболических винтов с направляющим вектором

$$\xi(x) = e_{24} + \lambda e_1 = (\lambda, x^4, 0, x^2). \tag{7}$$

Описание пространств Максвелла, допускающих 1-мерные группы параболических винтов с направляющим вектором

$$\xi(x) = e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3 = (-x^2 - x^4, x^1 + \lambda, \mu, -x^1) \tag{8}$$

проводилось Д. А. Львовым. В работе [18] рассмотрен случай $\lambda = \mu = 0$, в [17] – случаи $\lambda = 0,\ \mu \neq 0$ и $\lambda \neq 0,\ \mu = 0$. Тем самым исчерпаны все случаи параболических винтов, представленные в статье И. В. Белько [3].

Класс полей F_{ij}, инвариантных относительно 1-мерной группы пропорциональных бивращений с направляющим вектором

$$\xi(x) = e_{13} + \lambda e_{24} = (x^3, \lambda x^4, -x^1, \lambda x^2), \tag{9}$$

описан в работе [19].

В [2] получена полная классификация статических (т. е. не зависящих от времени) полей F_{ij}, найдено 22 непустых класса. В работе [10] получена полная классификация по подгруппам группы Пуанкаре электромагнитных волн, допускающих смещение по одной из пространственных координат, описано 15 классов.

В направлении групповой классификации пространств Максвелла помимо вышесказанного сделано следующее:

1) описана полная классификация пространств Максвелла, допускающих эллиплические винты с времениподобной осью (дипломная работа Н. А. Кошелевой 1999 г.);

2) описана полная классификация пространств Максвелла, допускающих эллиптические винты с пространственноподобной осью, соответствующие вектору

$$\xi(x) = e_{13} + \lambda e_2 = (x^3, \lambda, -x^1, 0) \tag{10}$$

(магистерская диссертация А. К. Курамшиной 1999 г.);

3) описана классификация пространств Максвелла, допускающих параболические движения (магистерская диссертация Д. А. Львова 1999 г.);

4) описана полная классификация пространств Максвелла, допускающих трансляции вдоль изотропных прямых

$$\xi(x) = e_2 + e_4 = (0, 1, 0, 1) \tag{11}$$

(дипломная работа Е. В. Морозовой 2000 г.);

5) описана частичная классификация пространств Максвелла, допускающих пропорциональное бивращение (дипломная работа Е. Г. Мороховой 2000 г.);

6) описана полная классификация пространств Максвелла, допускающих гиперболические винты (магистерская диссертация А. И. Воробьева 2000 г.).

Эти материалы существуют пока в виде рукописей, их публикация намечена на ближайшие годы.

3. Первые интегралы уравнений Лоренца

Система уравнений Лоренца [15, § 90]

$$mc\frac{Du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k, \quad u^i = \frac{du^i}{ds} \tag{12}$$

описывает движение пробной заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, вообще говоря, при наличии тяготения. Для этих уравнений автором разработан метод получения первых интегралов, основанный на использовании теоремы Э. Нётер и того факта, что тензор электромагнитного поля представляет собой симплектическую структуру на 4-мерном многообразии M, изображающем пространство-время [22, 23, 26, 36]. Автором и учениками получены наборы интегралов для некоторых конкретных классов электромагнитных полей [4, 11 – 13, 22, 23, 26, 35]. В работе [26] приведена сводка результатов, содержащихся в депонированных рукописях [4, 22] и диссертации [23].

Суть метода заключается в следующем. Уравнения (12) могут быть получены как уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала (действия для заряженной частицы в электромагнитном поле, вообще говоря, при наличии тяготения)

$$S[x] = \int(-mc\,ds - \frac{e}{c}A_i\,dx^i). \tag{13}$$

В соответствии с теоремой Э.Нетер [9], каждой одномерной группе диффеоморфизмов G_1, не меняющих функционал (13), соответствует первый интеграл уравнений Лоренца

$$H = \xi^i(mcg_{ij}\dot{x}^j - \frac{e}{c}A_i), \tag{14}$$

где $\xi^i = \xi^i(x)$ – касательное векторное поле группы G_1, а точкой обозначено дифференцирование по параметру s. Все интегралы вида (14) могут быть получены с использованием группы $G_S = G_g \cap G_F$, где G_g – группа движений псевдориманова пространства (M, g). Для этого следует произвести следующие действия.

1. Найти базис $\{\xi_\alpha,\quad \alpha = 1, \ldots, r = \dim G_S\}$ алгебры $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_g \cap \mathcal{L}_F$, соответствующей группе G_S. Для этого достаточно решить систему

$$L_\xi g_{ij} = 0, \quad L_\xi F_{ij} = 0, \tag{15}$$

где L_ξ означает производную Ли.

2. Для каждого базисного вектора $\xi_\alpha \in \mathcal{L}_S$ найти симметричный потенциал

$$A'_i = A_i + \partial_i f, \tag{16}$$

удовлетворяющий уравнению

$$L_{\xi_\alpha} A'_i = 0. \tag{17}$$

3. Выписать первые интегралы по формуле (14), заменив A_i на A'_i,

$$H_\alpha = \xi^i_\alpha(mcg_{ij}\dot{x}^j - \frac{e}{c}A'_i). \tag{18}$$

Что касается обоснования описанного метода, то следует признать, что автор не располагает полным доказательством того, что для каждого $\xi_\alpha \in \mathcal{L}_S$ существует калибровочное преобразование (16) от исходного потенциала A_i к симметричному A'_i. Такое доказательство удалось получить только для невырожденного электромагнитного поля ($\det F_{ij} \neq 0$). Пока оно только анонсировано в [27]. Наличие такого доказательства в общем случае гарантировало бы приннципиальную возможность получения полного набора интегралов для нетривиальной группы G_S. Следует заметить, что в практике использования метода симметричный потенциал A'_i всегда найти удавалось.

Для постоянных и однородных полей F_{ij} всех типов в отсутствии тяготения

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & -E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$(B, E = \text{const})$ группы G_S 6-мерны, интегралы уравнений Лоренца описаны в [22, 23, 26]. Для кулоновского поля, заданного потенциалом

$$A_i = (0, 0, 0, e_o/r), \qquad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \tag{20}$$

группа G_S 6-мерна, интегралы уравнений Лоренца описаны там же.

А. В. Васюков [4, 26] нашел набор интегралов для осесимметричного магнитного поля, скрещенного с осесимметричным электрическим полем, заданного потенциалом

$$\tilde{A}_i = (0, 0, B_0 \ln r, E_0\varphi), \quad B_0,\, E_0 = \text{const}, \tag{21}$$

где r, φ — полярные координаты в плоскости Ox^1x^2 (r – первая, φ – вторая)

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = x^2/x^1. \tag{22}$$

Там же описан рассмотренный Я. В. Бурдановым случай постоянного магнитного поля, скрещенного с перпендикулярным ему электрическим полем, меняющимся по гармоническому закону,

$$A_i = \left(\frac{E_0 c}{\omega} \sin\frac{\omega x^4}{c},\ -B_3 x^1,\ 0,\ 0\right), \tag{23}$$

Группа G_S в обоих случаях 3-мерна.

Постоянное в равноускоренной системе отсчета [33] электромагнитное поле

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{\sqrt{(\varepsilon x^1+1)^2-(\varepsilon x^4)^2}} \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ \frac{E}{\sqrt{(\varepsilon x^1+1)^2-(\varepsilon x^4)^2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$(B, E, \varepsilon = \text{const})$ рассмотрено автором в [22, 23, 26]. Группа G_S 4-мерна, найдены 4 независимых интеграла уравнений Лоренца.

В работе [12] получено 6 интегралов в случае поля плоской монохроматической волны

$$A_i = (0,\ \sin(x^1 - x^4),\ \cos(x^1 - x^4),\ 0). \tag{25}$$

На примере полей вида (19) А. В. Васюков сравнивал рассматриваемый здесь метод получения первых интегралов уравнений Лоренца с методом группового анализа дифференциальных уравнений [9, 20]. В этом случае последний требует более громоздких вычислений [5].

Решение проблемы классификации пространств Максвелла (Эйнштейна – Максвелла) позволит применять метод получения интегралов уравнений Лоренца к целым классам этих пространств, допускающих нетривиальные группы G_S, тем самым получая законы сохранения в этих пространствах. Примером такого подхода может служить работа [13], к которой найдены наборы первых интегралов уравнений Лоренца для двух классов электромагнитных волн, полученных А. С. Ивановой [10].

В первом случае рассматривался класс полей F_{ij} вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = C_1,\ F_{13} = C_2,\ F_{14} = C_3,\ F_{24} = C_4, \\ &F_{23} = \varphi(x^2 - x^4),\ F_{34} = \varphi(x^2 - x^4) + C_5, \end{aligned} \tag{26}$$

где $C_i = \text{const}$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, $\varphi(t)$ – произвольная гладкая функция (группа G_S 3-мерна). Во втором — класс

$$F_{12} = F_{13} = F_{14} = 0, \quad F_{24} = B, \quad F_{23} = F_{34} = \frac{A}{x^2 - x^4}, \tag{27}$$

где A, B – константы $(A \neq 0, B \neq 0)$ (группа G_S 4-мерна). В этой же работе получен набор из 5 интегралов уравнений Лоренца для случая поля плоской поперечной волны

$$A_i = (0,\ A_2(x^1 - x^4),\ A_3(x^1 - x^4),\ 0), \tag{28}$$

где $A_2(t), A_3(t)$ – функции одной переменной. Класс (28) содержит поле (25).

Кроме вышеперечисленных классов рассматривались и другие, которые пока не доведены до публикации. Наиболее важные из них — классы магнитостатических полей, наборы интегралов для которых получил Р. А. Параскевов в своей дипломной работе.

Библиографический список

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М., 1974.
2. *Белова О. Г., Зарембо А. Н., Паринов М. А., Сергеева О. О., Угарова Ю. Г.* Классификация статических электромагнитных полей по подгруппам группы Пуанкаре // Науч. тр. Иван. гос. ун-та: Вып. 3. Математика. Иваново, 2000.
3. *Белько И. В.* Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 1.
4. *Бурданов Я. В., Васюков А. В., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей. Иваново, 1993. Деп. в ВИНИТИ 03.11.93, № 2736-В93.
5. *Васюков А. В., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для однородных электромагнитных полей. Иваново, 1990. Деп.в ВИНИТИ 03.01.91, № 79-В91.
6. *Воробьев А. И., Паринов М. А.* Электромагнитные поля, инвариантные относительно гиперболических винтов // Науч. тр. Иван. гос. ун-та: Вып. 2. Математика. Иваново, 1999.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М., 1979.
8. *Зайцев Г. А., Паринов М. А.* О группе, определяемой невырожденным тензором электромагнитного поля // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький, 1983.
9. *Ибрагимов Н. Х.* Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. Новосибирск, 1972.

10. *Иванова А. С.* Групповая классифиикация электромагнитных волн, допускающих смещение по одной из пространственных координат // Науч. тр. Иван. гос.ун-та: Вып. 2. Математика. Иваново, 1999.
11. *Иванова А. С.* Первые интегралы уравнений Лоренца для частицы в поле плоской поперечной волны // Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения (МНК АДМ – 2000): Тез. докл. Междунар. науч. конф. Воронеж, 2000.
12. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца в случае плоской монохроматической волны // Науч. тр. Иван. гос. ун-та: Вып. 1. Математика. Иваново, 1997.
13. *Иванова А. С., Парфентьева А. Е., Хвойницкая С. В.* Первые интегралы уравнений Лоренца для трех классов электромагнитных волн // Там же. Вып. 3.
14. *Кошелева Н. А., Паринов М. А.* Электромагнитные поля, инвариантные относительно эллиптических винтов // Там же. Вып. 2.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М., 1967.
16. *Львов Д. А.* Некоторые классы электромагнитных полей, инвариантных относительно параболического винта // Международная школа-семинар по геометрии и анализу, посвященная 90-летию Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 5 – 11 сент. 2000 г. Ростов н/Д, 2000.
17. *Львов Д. А.* Классы электромагнитных полей, инвариантных относительно параболического винта // Молодая наука – 2000: Сб. науч. ст. аспирантов и студентов ИвГУ. Иваново, 2000.
18. *Львов Д. А., Паринов М. А.* Электромагнитные поля, инвариантные относительно параболического винта // Науч. тр. Иван. гос. ун-та: Вып. 2. Математика. Иваново, 1999.
19. *Морохова Е. Г., Паринов М. А.* Электромагнитные поля, допускающие пропорциональное бивращение // Там же. Вып. 3.
20. *Овсянников Л. В.* Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1966.
21. *Паринов М. А.* О симплектических группах электромагнитных полей. Иваново, 1979. Деп.в ВИНИТИ 28.05.79, № 1877-79.
22. *Паринов М. А.* Симплектическая группа электромагнитного поля и первые интегралы уравнений движения Лоренца. Иваново, 1981. Деп.в ВИНИТИ 22.02.82, № 802-82.
23. *Паринов М. А.* Симплектические и потенциальные структуры электромагнитных полей и их использование для получения первых интегралов уравнений движения Лоренца: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иваново, 1982.
24. *Паринов М. А.* О некоторых геометрических объектах, связанных с электромагнитными полями чистых вырожденных типов//Ивановский государственный университет – региональный центр науки, культуры и образования: Тез. докл. юбил. науч. конф. Иваново, 1994.
25. *Паринов М. А.* Введение в симплектическую геометрию: Учеб. пособие. Иваново, 1994.
26. *Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца: (Сводка результатов) // Науч. тр. Иван. гос. ун-та: Вып. 1. Математика. Иваново, 1997.

27. *Паринов М. А.* Об одном методе получения первых интегралов уравнений Лоренца // Стохастический и глобальный анализ: Тез. докл. междунар. конф. Воронеж, 13 – 19 янв. 1997 г. Воронеж, 1997.
28. *Паринов М. А.* Задача групповой классификации электромагнитных полей // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. ВЗМШ. Воронеж, 1999.
29. *Паринов М. А.* Групповая классификация пространств Максвелла // Современный анализ и его приложения: Тез. докл. ВЗМШ. Воронеж, 2000.
30. *Паринов М. А.* Групповая классификация статических пространств Максвелла // Международная школа-семинар по геометрии и анализу, посвященная 90-летию Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 5 – 11 сент. 2000 г. Ростов н/Д, 2000.
31. *Паринов М. А.,Зайцев Г. А.* Симметрии в классической теории электромагнитного поля // Теоретико-групповые методы в физике: Тр. международного семинара. М., 1980. Т. 1.
32. *Петров А. З.* Пространства Эйнштейна. М., 1961.
33. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961.
34. *Combe Ph., Sorba P.* Electromagnetic fields with symmetry // Physica. 1975. Vol. A80. № 3.
35. *Ivanova A. S.* The first integrals of the Lorentz equations for three classes of the electromagnetic waves // International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems. Susdal, August 21 – 26, 2000: Abstracts. Vladimir, 2000.
36. *Parinov M. A.* One method of obtaining the first integrals of the Lorentz equations // Ibid.