Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2000 С. 149 – 155

С. В. Пухов

НАТУРАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ НА СФЕРЕ S^{n-1} ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^n$

В работе на основе теории Атьи – Анселона – Лорана приводится построение натуральных интерполяционных сплайнов на единичной сфере n-мерного евклидова пространства как решений некоторой экстремальной задачи.

The construction based on the M. Atteia — P. M. Anselone — P.-J. Laurent theory of a natural interpolated splines on the unit sphere is given as a solution of some extremal problem.

УДК 519.651; ББК 22.19.

Введение

Предварим изложение следующими замечаниями.

Как известно, на произвольном компактном римановом многообразии имеется естественный дифференциальный оператор — оператор Лапласа – Бельтрами. В силу компактности многообразия спектр этого оператора чисто точечный, а отвечающие собственным значениям функции — аналитические и образуют ортогональный базис в пространстве L_2. Это в принципе позволяет построить функцию Грина для оператора Лапласа – Бельтрами и в результате определить натуральный сплайн как сумму линейной комбинации значений функции Грина (при фиксированном выборе конечного числа значений одной из переменных) и элемента ядра оператора Лапласа – Бельтрами. Видимо, в общем случае на этом пути возникают (и значительные) трудности. Однако для случая, когда в качестве риманова многообразия рассматривается единичная сфера S^{n-1} евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, данный подход к построению натуральных сплайнов может быть реализован до конца. Этому вопросу и посвящена данная статья.

Сплайнами называют функции, которые "склеены"из различных кусков "обобщенных многочленов". Первые сплайн-функции, предложенные И. Шенбергом в 1946 году, были "склеены"из кубических многочленов.

Существенный шаг в теории сплайнов был сделан Дж. Холлидеем в 1957 году. Он сформулировал свойства, связавшие кубические сплайны Шенберга с решением вариационной задачи теории упругости. Такие сплайны были названы натуральными.

Эти свойства затем были обобщены на случай произвольной нечетной степени Дж. Албергом, Э. Нильсоном, Дж. Уолшем (1965).

С начала 60-х годов многие ученые направили свои усилия на обобщение свойств полиномиальных сплайн-функций. Ограничиваясь обычно функциональными гильбертовыми пространствами, они рассматривали задачи минимизации, аналогичные тем, которые встречались в элементарной теории сплайн-функций. При этом за решениями таких задач сохранялся термин “сплайн”или “натуральный сплайн”(см. [2, 3, 5]).

В работах М. Атьи, Ф. М. Анселона, П.-Ж. Лорана в 1965–1968 гг. было впервые дано общее определение сплайна как элемента абстрактного гильбертова пространства, являющегося решением экстремальной задачи, доказаны теоремы существования и единственности, сформулирован критерий представимости решения через натуральные сплайны (см. [4]).

Целью настоящей статьи является построение натуральных сплайнов на единичной сфере S^{n-1} евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Натуральные сферические сплайны находят применения в задаче аппроксимации гравитационного поля Земли.

§ 1. Основные положения теории Атьи – Анселона – Лорана

В изложении это параграфа мы следуем [2], [4].

Пусть X, Y, Z — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot\ ,\ \cdot)_X$, $(\cdot\ ,\ \cdot)_Y$, $(\cdot\ ,\ \cdot)_Z$ и нормами $||\cdot||_X$, $||\cdot||_Y$, $||\cdot||_Z$, соответственно.

Предположим, что из пространства X в пространство Z действует линейный ограниченный оператор A и в пространстве Z фиксирован $z \in Z$.

Если уравнение $Ax = z$ имеет решения, т. е. множество

$$A^{-1}(z) = \{x \in X\ :\ Ax = z\} \tag{1.1}$$

непусто, то можно определить интерполяционный сплайн $\sigma \in X$.

Для этого вводится в рассмотрение еще один линейный ограниченный оператор $T\ :\ X \to Y$.

Определение. *Пусть $A^{-1}(z) \neq \emptyset$. Интерполяционным сплайном σ называется элемент пространства X, удовлетворяющий равенству*

$$||T\sigma||_Y^2 = \min_{x \in A^{-1}(z)} ||Tx||_Y^2, \tag{1.2}$$

т. е. $x = \sigma$ является решением экстремальной задачи минимизации функционала

$$||Tx||_Y^2 \to \min \tag{1.3}$$

при ограничениях в виде равенств

$$Ax = z. \tag{1.4}$$

Пусть $N(A)$ и $N(T)$ — ядра операторов A и T, соответственно.

Теорема 1.1. *Если $TN(A)$ замкнуто в Y и*

$$N(A) \cap N(T) = \{0\}, \tag{1.5}$$

то интерполяционный сплайн $\sigma \in X$, являющийся решением задачи (1.3) – (1.4), существует и единствен для любого $z \in Z$ такого, что $A^{-1}(z) \neq \emptyset$.

Достаточные условия замкнутости множества $TN(A)$ даются в следующей теореме.

Теорема 1.2. *Если образ TX оператора T замкнут в Y, а ядро $N(T)$ конечномерно, то $TN(A)$ замкнуто в Y.*

Критерий интерполяционного сплайна дается в следующей теореме.

Теорема 1.3. *Элемент $\sigma \in A^{-1}(z)$ является интерполяционным сплайном (т. е. решением задачи (1.3) – (1.4)) тогда и только тогда, когда для всех $x \in A^{-1}(z)$ выполнено*

$$(T\sigma, T(x - \sigma))_Y = 0. \tag{1.6}$$

Последнее равенство может быть записано также в следующем виде:

$$(T\sigma, Tx)_Y = 0 \quad \forall\, x \in N(A). \tag{1.7}$$

§ 2. Натуральные сплайны на S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

элемента $x = (x_1, \ldots, x_n)$ единичную сферу S^{n-1} с центром в нуле.

Пусть фиксированы некоторые точки η_j сферы S^{n-1}, $j = \overline{1, N}$, и заданы числа $y_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, N}$.

Поставим задачу:

среди гладких функций $u : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ определить наиболее "плавную" функцию, удовлетворяющую интерполяционным условиям

$$u(\eta_j) = y_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

В качестве функционала "плавности" выберем следующий квадратичный интегральный функционал

$$\int\limits_{S^{n-1}} (\Delta^m u)^2 d\omega,$$

где Δ — оператор Лапласа, $d\omega$ — элемент $(n-1)$-мерного объема сферы, m — целое неотрицательное число, Δ^m — полигармонический оператор.

Таким образом, поставлена следующая экстремальная задача

$$\int\limits_{S^{n-1}} (\Delta^m u)^2 d\omega \to \min, \tag{2.1}$$

$$u(\eta_j) = y; \quad j = \overline{1, N}. \tag{2.2}$$

Для решения этой экстремальной задачи необходимо уточнить класс гладких функций u, для которого решается экстремальная задача, что и будет сделано ниже.

Для точки $x = (x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ определим сферические координаты. Обозначим $r = ||x||$, $\eta = \frac{1}{r}x$. Пусть $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$ — стандартные сферические координаты точки η (см. [7]).

Оператор Лапласа Δ в сферических координатах можно записать в следующем виде

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_\xi,$$

где Δ_r — радиальная часть оператора Δ, Δ_ξ — сферический оператор Лапласа – Бельтрами.

На сфере S^{n-1} радиальная часть оператора Δ равна тождественно нулю. Далее для простоты записи индекс ξ в обозначении оператора Δ_ξ писать не будем.

В пространстве $L_2(S^{n-1})$ существует полная ортогональная система функций, состоящая из сферических гармоник порядка k:

$$Y_k^l(\xi), \quad l = \overline{1, \tau(k)}; \; k = 0, 1, 2, \cdots,$$

где $\tau(k)$ — число сферических гармоник порядка k.

Отметим, что

$$\Delta(Y_k^l) = -k(n+k-2)Y_k^l, \tag{2.3}$$

т. е. Y_k^l — собственные функции оператора Δ с собственными значениями

$$\lambda_k = -k(n+k-2). \tag{2.4}$$

Любую функцию $u \in L_2(S^{n-1})$ можно разложить в ряд Фурье по сферическим гармоникам

$$u(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\tau(k)} a_{kl} Y_k^l(\eta). \tag{2.5}$$

Рассмотрим функциональное пространство

$$H^m(S^{n-1}) = \left\{ u \in L_2(S^{n-1}) \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\tau(k)} \lambda_k^{2m} a_{kl}^2 < \infty \right\}. \tag{2.6}$$

Применяя формально оператор Δ^m к ряду (2.5), получим

$$\Delta^m u(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\tau(k)} \lambda_k^m a_{kl} Y_k^l(\eta). \tag{2.7}$$

Если $u \in H^m(S^{n-1})$, то ряд (2.7) сходится в $L_2(S^{n-1})$ и его сумма является элементом из $L_2(S^{n-1})$. Следовательно, можно определить оператор

$$T = \Delta^m \; : \; H^m(S^{n-1}) \to L_2(S^{n-1})$$

по формуле (2.7).

Отметим следующие свойства оператора T.

Свойство 1. *Для любой функции* $u \in H^m(S^{n-1})$ *и* $2m > n-2$ *ряд Фурье (2.5) сходится на* S^{n-1} *равномерно, и поэтому сумма этого ряда является функцией, непрерывной на* S^{n-1}.

Свойство 2. *Если функция* $u \in H^m(S^{n-1})$, $2m > n-2$, *и* $\Delta^m u = 0$ *почти всюду на* S^{n-1}, *то* $u \equiv const$.

Перепишем задачу (2.1) – (2.2) в следующем виде: требуется найти функцию $u \in H^m(S^{n-1})$ такую,что она является решением экстремальной задачи

$$||\Delta^m u||_Y^2 \to \min \tag{2.8}$$

$$u(\eta_j) = y_j, \ j = \overline{1, N}. \tag{2.9}$$

Эта задача включается в общую схему, описанную в § 1. Роль оператора T играет $\Delta^m \ : \ H^m(S^{n-1}) \to L_2(S^{n-1})$, а роль пространств X и Y — два гильбертовых пространства $H^m(S^{n-1})$ и $L_2(S^{n-1})$, роль оператора $A \ : \ X \to Z$ — оператор следа $A\ u = (u(\eta_1), \ldots \ u(\eta_N)), \ Z = \mathbb{R}^N$.

Для решения задачи (2.8) – (2.9) построим функцию Грина оператора Δ^m на S^{n-1}:

$$G(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\tau(k)} \frac{1}{\lambda_k^{2m}} Y_k^l(\xi) Y_k^l(\eta). \tag{2.10}$$

При фиксированном η функция $G(\xi, \eta) \in H^m(S^{n-1})$. Из (2.7) следует, что

$$\Delta^m G(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\tau(k)} \frac{1}{\lambda_k^{m}} Y_k^l(\eta) Y_k^l(\xi), \tag{2.11}$$

здесь оператор Δ^m действует по ξ.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Зафиксируем* $\eta \in S^{n-1}$ *в* $G(\xi, \eta)$. *Для любой функции* $u \in H^m(S^{n-1})$ *справедливо представление*

$$u(\eta) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} u(\xi) d\omega + (\Delta^m G, \ \Delta^m u), \tag{2.12}$$

где $(\cdot\ ,\ \cdot)$ *— скалярное произведение, определенное формулой*

$$(f, g) = \int\limits_{S^{n-1}} f(\xi) g(\xi) d\omega,$$

а ω_{n-1} — $(n-1)$-мерный объем сферы S^{n-1}.

Определение. *Натуральным сферическим сплайном* $S(\xi)$ *называется функция*

$$S(\xi) = c + \sum_{j=1}^{N} d_j G(\xi, \eta_j) \tag{2.13}$$

при условии, что $\sum_{j=1}^{N} d_j = 0$.

Здесь $c, d_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, N}$, точки $\eta_j \in S^{n-1}$ попарно различны, $j = \overline{1, N}$.

Точки η_j называются узлами сплайна, c, d_j — коэффициентами сплайна, $j = \overline{1, N}$.

На основании леммы 1 доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Для любого натурального сферического сплайна* $S(\xi)$ *вида (2.13) и любой функции* $u \in H^m(S^{n-1})$ *справедливо равенство*

$$(\Delta^m S,\ \Delta^m u) = \sum_{j=1}^{N} d_j u(n_j). \tag{2.14}$$

На основании леммы 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть точки* $\eta_1, \ \dots \ , \eta_N \in S^{n-1}$ *попарно различны. Тогда интерполяционная задача* $S(\eta_j) = y_j$, $j = \overline{1, N}$, *однозначно разрешима при любых* y_j *в множестве сплайнов с узлами* η_j, $j = \overline{1, N}$.

Обозначим через $\overline{S}$ такой натуральный сплайн, что $\overline{S}(\eta_j) = y_j$, $j = \overline{1, N}$.

Теорема 2.2. *Единственным решением задачи (2.8) – (2.9) является* $\overline{S}$.

Действительно, в соответствии со следствием (1.7) из теоремы 1.3 условие $(T\overline{S}, Tu) = 0$ для всех $u \in N(A)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы $\overline{S}$ был решением задачи (2.8) – (2.9). А это условие выполнено для $T = \Delta^m \ : \ H^m(S^{n-1}) \to L_2(S^{n-1})$ и $A \ : \ H^m(S^{n-1}) \to \mathbb{R}^N$, действующего по правилу $Au = (u(\eta_1), u(\eta_N))$, в силу леммы 2.

Для проверки единственности решения достаточно показать, что

$$N(T) \cap N(A) = \{0\}.$$

Пусть $u \in N(T) \cap N(A)$. Т. к. $u \in N(T)$, то из свойства 2 следует, что $u(\eta) \equiv const$. А так как $u \in N(A)$, то $u(\eta) \equiv 0$.

Замечания (по поводу доказательств утверждений § 2)

1. Доказательство свойства 1 основано на теореме сложения — тождестве, связывающем сферические гармоники и многочлены Гегенбауэра (см. [1]), а также оценках многочленов Якоби (см. [6]).
2. Свойство 2 следует из равенства Персеваля для $\Delta^m u$ и определения пространства $H^m(S^{n-1})$.
3. Лемма 1 доказывается вычислением скалярного произведения $(\Delta^m G, \Delta^m u)$, представив $\Delta^m G$ и $\Delta^m u$ в виде разложений в ряды Фурье по сферическим гармоникам.
4. Лемма 2 следует из леммы 1 и вида натурального сферического сплайна (2.13).
5. Доказательство теоремы 2.1 основано на лемме 2.

6. Доказательство теоремы 2.2 основано на положениях теории Атьи – Анселона – Лорана (§ 1).

Библиографический список

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., 1973. Т. 1 – 2.
2. *Василенко В. А.* Сплайн-функции : теория, алгоритмы, программы. Новосибирск, 1983.
3. *Игнатов М. И., Певный А. В.* Натуральные сплайны многих переменных. Л., 1991.
4. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М., 1975.
5. *Малоземов В. Н., Певный А. Б.* Полиномиальные сплайны. Л., 1986.
6. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л., 1949.
7. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974.