Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2001 С. 102 – 105

Д. Н. Азаров

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ *P*-ГРУППАМИ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

Доказывается, что произвольная группа конечного ранга, аппроксимируемая конечными p-группами для любого простого числа p, является нильпотентной. Тем самым обобщается соответствующий результат Сексенбаева о полициклических группах.

It is proved that any group of finite rank is nilpotent if it is residually a finite p-group for every prime p. This generalized the similar result of Sexsenbayev about polycyclic groups.

УДК 512.543.

В [2] доказано, что если полициклическая группа аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p, то она нильпотентна. В настоящей работе получено следующее обобщение этого результата:

Теорема. *Если группа конечного ранга аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p, то она нильпотентна.*

Напомним, что группа G называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G обладает не более чем r порождающими. Наименьшее число r с таким свойством называется рангом группы G и обозначается далее через $r(G)$.

Перейдем к доказательству теоремы. Очевидно, что все полициклические группы, в частности все конечно порожденные нильпотентные группы, имеют конечный ранг. Для полициклической группы G через $r_Z(G)$ будем обозначать полициклический ранг, т. е. число бесконечных циклических факторов в любом субнормальном ряде группы G с циклическими факторами.

Предложение 1. *Пусть p — целое положительное число. Если конечно порожденная нильпотентная группа G содержит конечную центральную подгруппу H такую, что $H^p = 1$, то существует эпиморфизм φ группы G на конечную группу $\overline{G}$, содержащую центральную подгруппу $\overline{H}$ такую, что $\overline{H}^p = 1$ и $|\overline{H}| = |H|p^{r_Z(G)}$.*

Докажем это утверждение индукцией по $r_Z(G)$. При $r_Z(G) = 0$ данное утверждение очевидно. Пусть теперь $r_Z(G) > 0$. Предположим, что данное утверждение справедливо для любой конечно порожденной нильпотентной группы G_1 такой, что $r_Z(G_1) < r_Z(G)$.

Пусть C — центр группы G. Так как $r_Z(G) > 0$, то C — бесконечная конечно порожденная абелева группа (см., напр., [1, с. 151]). Поэтому $C = B \times A$, где B — конечная группа, A — свободная абелева группа, причем $r_Z(A) > 0$. Пусть $G_1 = G/A^p$. Тогда

$$r_Z(G_1) = r_Z(G) - r_Z(A^p) = r_Z(G) - r_Z(A) < r_Z(G). \tag{1}$$

Пусть $H_1 = HA/A^p$. По условию H — конечная центральная подгруппа группы G, т. е. $H \leqslant B$. Отсюда и из того, что произведение BA является прямым, следует, что произведение HA является прямым, и поэтому

$$H_1 = (H \times A)/A^p \cong H \times A/A^p.$$

Отсюда и из того, что $H^p = 1$, получаем

$$H_1^p = 1, \ |H_1| = |H||A/A^p| = |H|p^{r_Z(A)} < \infty. \tag{2}$$

Заметим еще, что H_1 — центральная подгруппа группы G_1, поскольку подгруппы H и A лежат в центре группы G. Таким образом, H_1 — конечная центральная подгруппа группы G_1, $H_1^p = 1$ и $r_Z(G_1) < r_Z(G)$. По индуктивному предположению существует эпиморфизм φ_1 группы G_1 на конечную группу $\overline{G}$, содержащую центральную подгруппу $\overline{H}$ такую, что

$$\overline{H}^p = 1, \quad |\overline{H}| = |H_1|p^{r_Z(G_1)}.$$

Отсюда и из соотношений (2) и (1) получаем

$$|\overline{H}| = |H|p^{r_Z(A)}p^{r_Z(G_1)} = |H|p^{r_Z(G)}.$$

Теперь для завершения доказательства остается заметить, что произведение естественного гомоморфизма $\varepsilon : G \to G_1$ и эпиморфизма $\varphi_1 : G_1 \to \overline{G}$ является эпиморфизмом группы G на группу $\overline{G}$.

Предложение 2. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа. Тогда $r_Z(G) \leqslant r(G)$.*

В самом деле, применяя предложение 1 к простому числу p и к подгруппе $H = 1$, заключаем, что существует эпиморфизм φ группы G на конечную группу $\overline{G}$, содержащую центральную подгруппу $\overline{H}$ такую, что

$$\overline{H}^p = 1 \quad \text{и} \quad |\overline{H}| = p^{r_Z(G)}.$$

Отсюда следует, что группа $\overline{H}$ раскладывается в прямое произведение циклических групп порядка p и количество прямых сомножителей в этом разложении равно $r_Z(G)$. Поэтому $r(\overline{H}) = r_Z(G)$. С другой стороны, $r(\overline{H}) \leqslant r(\overline{G}) \leqslant r(G)$. Таким образом, $r_Z(G) \leqslant r(G)$.

Далее через $\gamma_k(G)$ обозначается k-й член нижнего центрального ряда группы G.

Предложение 3. *Пусть G — конечно порожденная группа конечного ранга и $r(G) = r$. Тогда существует целое положительное число $k \leqslant r + 1$ такое, что $|\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)| < \infty$.*

В самом деле, допустим противное. Тогда в последовательности

$$G = \gamma_1(G) \geqslant \gamma_2(G) \geqslant \cdots \geqslant \gamma_{r+2}(G)$$

все факторы бесконечны, и поэтому $r_Z(G/\gamma_{r+2}(G)) > r$. Отсюда и из предложения 2 следует, что $r(G/\gamma_{r+2}(G)) > r$, и поэтому $r(G) > r$, что невозможно.

Предложение 4. *Пусть группа G аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p. И пусть для некоторого целого положительного числа k $|\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)| = n < \infty$. Тогда $\gamma_k(G) = 1$.*

Для доказательства этого предложения зафиксируем простое число p, взаимно простое с n. Пусть N — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G. Тогда

$$\begin{aligned}
&\gamma_k(G/N)/\gamma_{k+1}(G/N) = (\gamma_k(G)N/N)/(\gamma_{k+1}(G)N/N) \cong \\
&\cong \gamma_k(G)N/\gamma_{k+1}(G)N = \gamma_k(G)\gamma_{k+1}(G)N/\gamma_{k+1}(G)N \cong \\
&\cong \gamma_k(G)/(\gamma_k(G) \cap \gamma_{k+1}(G)N) \cong \\
&\cong (\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)\,)/(\,(\gamma_k(G) \cap \gamma_{k+1}(G)N)/\gamma_{k+1}(G)\,).
\end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим через l порядок фактор-группы $\gamma_k(G/N)/\gamma_{k+1}(G/N)$. Поскольку G/N — конечная p-группа, то l есть степень числа p. С другой стороны, в силу (3) l делит n. Учитывая к тому же, что числа p и n взаимно просты, заключаем, что $l = 1$, т. е.

$$\gamma_k(G/N) = \gamma_{k+1}(G/N).$$

Отсюда и из того, что конечная p-группа G/N нильпотентна, следует, что $\gamma_k(G/N) = 1$, т. е. $\gamma_k(G)N/N = 1$, и поэтому $\gamma_k(G) \leqslant N$. Мы видим, что $\gamma_k(G)$ содержится в любой нормальной подгруппе конечного p-индекса группы G. Отсюда и из аппроксимируемости группы G конечными p-группами следует, что $\gamma_k(G) = 1$.

Предложение 5. *Пусть G — конечно порожденная группа конечного ранга и $r(G) = r$. И пусть группа G аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p. Тогда $\gamma_{r+1}(G) = 1$.*

В самом деле, по предложению 3 существует целое положительное число $k \leqslant r + 1$ такое, что $|\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)| < \infty$. Поэтому в силу предложения 4 $\gamma_k(G) = 1$ и, следовательно, $\gamma_{r+1}(G) = 1$.

Докажем теперь основной результат работы. Пусть F — группа конечного ранга r, аппроксимируемая конечными p-группами для любого простого числа p. Если G — конечно порожденная подгруппа группы F, то $r(G) \leqslant r$. По предложению 5 $\gamma_{r(G)+1}(G) = 1$, и поэтому $\gamma_{r+1}(G) = 1$. Отсюда и из того, что G — произвольная конечно порожденная подгруппа группы F, заключаем, что $\gamma_{r+1}(F) = 1$. Поэтому группа F нильпотентна. Теорема доказана.

Заметим в заключение, что в действительности доказано более сильное утверждение. А именно: произвольная группа конечного ранга является нильпотентной, если она аппроксимируется конечными p-группами для любого числа $p \in \pi$, где π — произвольное бесконечное множество простых чисел.

Библиографический список

1. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М., 1972. 288 с.
2. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, вып. 3. С. 79—83.