Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2001 С. 105 – 109

Е. П. Барановский

СИМПЛЕКСЫ 8-КРАТНОГО ОТНОСИТЕЛЬНОГО ОБЪЕМА В L-РАЗБИЕНИЯХ 12-МЕРНЫХ РЕШЕТОК

Предлагаются примеры 12-мерных решеток, у которых имеются L-симплексы 8-кратного относительного объема.

An examples of 12-dimensional lattices having L-simplexes of 8-dimensional relative volume are given.

УДК УДК 514.17.

Рассмотрим семейство 12-мерных решеток, заданных реперами с метрическими формами

$$\begin{aligned}\psi(u_0,u_1,u_2,u_3) = \sum_{i=1}^{5}(t^i)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} t^i\,t^j + \frac{3}{2}\sum_{p=6}^{11}(t^p)^2 + \\ + 2\sum_{6\leqslant p<q\leqslant 11} t^p\,t^q + \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{5} t^i \sum_{p=6}^{11} t^p - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} t^i\,t^{i+6} + \\ + u_0\,(t^{12})^2 + \frac{1}{2}\,t^{12}(u_1\sum_{i=1}^{5} t^i + u_2 t^6) + \frac{3}{2}\,u_3\,t^{12}\sum_{k=7}^{11} t^k,\end{aligned} \qquad (1)$$

где $t^1, \ldots, t^{12}$ — переменные форм (и координаты в пространстве решеток), u_0, u_1, u_2, u_3 — параметры семейства, о которых будет сказано ниже.

Предложение 1. *При $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 1$ квадратичная форма (1) задает основной репер решетки Коксетера – Тодда K_{12}.*

▷ Известная 12-мерная решетка Коксетера – Тодда K_{12} (см., напр, [4]) будет всюду ниже рассматриваться заданной в форме, которая предложена в статьях [1; 2], то есть в форме центрировки решетки $\Gamma(F)$, где

$$F = \sum_{i=1}^{12}(x^i)^2 + \sum_{j=1}^{6} x^j x^{j+6}. \qquad (2)$$

Выполним в форме (1) линейное преобразование переменных:

$$t^1 = -x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + x^{10}, \quad t^2 = x^2 + x^4 - x^5 - x^6 - x^{11},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00010).

$$
\begin{aligned}
t^3 &= x^1 - x^3 + x^4 - x^5 + x^7 - x^{11},\\
t^4 &= -x^1 - x^3 + x^4 - x^5 - x^7 - x^{11},\\
t^5 &= x^2 - x^3 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{12},\\
t^6 &= x^2 - x^3 + 3x^4 - 2x^5 - x^6 + x^8 + 2x^{10} - 2x^{11} - x^{12},\\
t^7 &= -x^2 + x^3 - x^4 + 2x^5 + x^6 - x^8 + 2x^{11} + x^{12},\\
t^8 &= 2x^3 - 2x^4 + x^5 + x^6 + x^9 - x^{10} + x^{11} + x^{12},\\
t^9 &= -x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5 + x^6 + x^7 - x^8 - x^{10} + x^{11},\\
t^{10} &= -x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5 + x^6 - x^7 - x^8 - x^{10} + x^{11},\\
t^{11} &= -x^2 + x^3 - 2x^4 + 2x^5 - x^{10} + x^{11},\\
t^{12} &= 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 4x^5 - 2x^6 + 2x^8 - x^9 + 2x^{10} - 3x^{11} - x^{12}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Линейное преобразование (3) определяет в рассматриваемом нами евклидовом пространстве E^{12} наряду с заданными базисом $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_{12}\}$ с метрической формой (1) t-координатами другие, x-координаты — координаты точек и векторов $x^1, ..., x^{12}$ относительно базиса, заданного формой (2). При этом преобразовании репер $\mathcal{E}$ в x-координатах будет записан как некоторый репер $\mathcal{A} = \{\bar{a}_1, ..., \bar{a}_{12}\}$.

Обратимся к описанию решетки K_{12} и деталей ее L-разбиения в [2], где использованы x-координаты. Рассмотрим список вершин L-многогранника W. 81 вершина этого многограника названа в таблице указанной статьи. Ниже ее будем называть таблицей Т, а вершины многогранника, приведенные в таблице Т, — их номерами или буквой V с этими номерами.

Взяв за начало вершину многогранника W V_{61}, находим, что концам векторов репера $\mathcal{A}$ соответствуют также вершины этого многогранника — точки 10, 19, 50, 67, 51, 52, 80, 72, 16, 15, 20, 58. Убедившись, что репер $\mathcal{A}$ является основным репером решетки K_{12}, имеем доказательство того, что репер с метрической формой (1) при $u_0 = ... = u_3 = 1$ задает эту решетку. •

Пользуясь преобразованиями (3), выразим нужные нам результаты относительно L-разбиения решетки K_{12} статьи [2] в t-координатах, т. е. переведем с языка x-координат на язык t-координат.

Вершинам симплициальной грани S_2 многогранника W в t-координатах соответствуют начальная точка и концы векторов-отрезков репера $\mathcal{E}$ с отброшенным вектором $\bar{e}_{12} = (0, ..., 0, 1)$. Относительно этой гиперграни многогранник W 8-слойный, в самом “верхнем”, 8-м, слое расположена всего одна его вершина — точка V_{18}. В t-координатах это точка

$$V_{18} = (2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 4, -3, -3, -3, -3, -3,\ 8). \tag{4}$$

Центру сферы, описанной вокруг многогранника W, в t-координатах соответствует точка

$$O = \frac{1}{3}(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 5, -3, -3, -3, -3, -3,\ 9). \tag{5}$$

Используя результаты работы [3], выделим из L-многогранника W L-симплекс. Рассмотрим симплекс $S = \{A_0 A_1 ... A_{12}\}$, у которого $A_{12} = V_{18}$, а остальные вершины суть вершины гиперграни S_2.

Теперь деформируем решетку K_{12} следующим образом: выполним такое аффинное преобразование, при котором точки $A_0, A_1, ..., A_{11}$ останутся на месте, а точка A_{12} сдвинется по направлению вектора $\overline{A_{12}O}$ к точке O. Эта деформация будет задана вектором

$$\overline{A_0 A_{12}(\lambda)} = (1 - \lambda)\,\overline{A_0 A_{12}} + \lambda\,\overline{A_0 O}. \tag{6}$$

Далее воспользуемся леммой П. Г. Кононенко (лемма 2 из [3]):

При аффинном преобразовании, определяемом вектором (6), и достаточно малом значении $\lambda > 0$ вершины L-многогранника W, находящиеся по ту же сторону гиперплоскости, определяемой точками A_0, $A_1, \ldots, A_{11}$, что и симплекс S, окажутся вне сферы, описанной вокруг симплекса $S_\lambda = \{A_0 A_1 \ldots A_{11} A_{12}(\lambda)\}$, где $A_{12}(\lambda)$ — образ точки A_{12} при этом преобразовании, а вершины, находящися на противоположной стороне этой гиперплоскости, — внутри этой сферы.

В нашем случае из леммы следует, что после деформации решетки K_{12} при достаточно малом $\lambda > 0$ все ее слои остаются и слоями новой решетки K_{12}^*, а из L-многогранника W выделяется L-симплекс новой решетки $S(\lambda)$, вершина $A_{12}(\lambda)$ которого расположена в 8-м слое новой решетки, т. е. он имеет 8-кратный относительный объем.

Действительно, сфера, описанная вокруг симплекса S является и сферой, описанной вокруг многогранника W, и все вершины этого многогранника лежат по ту же сторону гиперплоскости $t^{12} = 0$, что и симплекс S. Согласно лемме все эти вершины, кроме $A_{12}(\lambda)$ и расположенных на самой гиперплоскости вершин, окажутся после деформации решетки вне сферы, описанной вокруг симплекса $S(\lambda)$, который тем самым является L-симплексом возникшей после деформации решетки K_{12}^*.

Деформация решетки K_{12} переводит ее заданные координатами $t^1, ..., t^{12}$ точки в точки с координатами

$$\begin{gathered} t_*^i = t^i - \frac{1}{6}\lambda\, t^{12}, \qquad i = 1,2,3,4,5; \\ t_*^6 = t^6 - \frac{7}{24}\lambda\, t^{12}; \\ t_*^k = t^k + \frac{1}{4}\lambda\, t^{12}, \qquad k = 7,8,9,10,11; \\ t_*^{12} = (1 - \frac{5}{8})\,\lambda\, t^{12}. \end{gathered} \tag{7}$$

Вершина симплекса S точка A_{12} переходит в точку

$$A_{12}(\lambda) = (2 - \frac{4}{3}\lambda, ..., 2 - \frac{4}{3}\lambda, 4 - \frac{7}{3}\lambda, -3 + 2\lambda, ..., -3 + 2\lambda, 8 - 5\lambda).$$

Согласно (7) вектор $\bar{e}_{12}$ репера $\mathcal{E}$ (по таблице T это вектор $\overline{V_{61}V_{58}}$) переходит в вектор

$$\bar{e}_{12}(\lambda) = \lambda(-\frac{1}{6}, ..., -\frac{1}{6}, -\frac{7}{24}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{4}, \frac{1}{\lambda} - \frac{5}{8}),$$

остальные 11 векторов этого репера остаются прежними. Метрическая форма основного репера полученной после деформации решетки содержит следующие по сравнению с K_{12} новые коэффициенты:

$$(\bar{e}_{12}(\lambda))^2 = 1 + \frac{1}{16}\lambda + \frac{1}{96}\lambda^2;$$

$$\bar{e}_i\bar{e}_{12}(\lambda) = \frac{1}{4}, \ \ i = 1, ..., 5;$$

$$\bar{e}_6\bar{e}_{12}(\lambda) = \frac{1}{4}(1 + \frac{\lambda}{8});$$

$$\bar{e}_k\bar{e}_{12}(\lambda) = \frac{3}{4}(1 + \frac{\lambda}{24}), \ \ k = 7, ..., 11.$$

Как итог имеем

Предложение 2. *При значениях параметров*

$$u_o = 1 + \frac{1}{16}\lambda + \frac{1}{96}\lambda^2, \ \ u_1 = 1, \ \ u_2 = 1 + \frac{\lambda}{8}, \ \ u_3 = 1 + \frac{\lambda}{24},$$

где $\lambda > 0$ *и достаточно мало, квадратичная форма (1) задает основные реперы семейства 12-мерных решеток, в L-разбиениях которых содержится симплекс 8-кратного относительного объема. Этот симплекс построен на задающем форму (1) репере, у которого вектор* $\bar{e}_{12}$ *заменен вектором с координатной строкой (4).*

Отметим, что связь между слойностью L-многогранников решеток и существованием симплекса в L-разбиениях решеток данной размерности с относительным объемом, равным слойности, была рассмотрена в работе [5].

Библиографический список

1. *Барановский Е. П.* Представление решетки Коксетера – Тодда K_{12} в форме центрировки // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 4. (2001). С. 19—22.
2. *Барановский Е. П., Виноградова И. Ю.* Некоторые подробности строения L-разбиения решетки Коксетера – Тодда K_{12} // Там же. С. 23—34.
3. *Барановский Е. П., Кононенко П. Г.* Об одном способе вывода L-многогранников n-мерных решеток // Мат. заметки. 2000. Т. 68. № 6. С. 830—841.
4. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. М., 1990. Т.1. 413 с.
5. *Рышков С. С., Эрдал Р. М.* Поэтажное построение L-тел решеток // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, вып. 2. С. 241—242.