Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2001 С. 109 – 115

А. С. Белов

О СВОЙСТВАХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для произвольного неотрицательного четного тригонометрического полинома порядка n с монотонными положительными коэффициентами и свободным членом a_0 и для каждого натурального числа $m = 1, \ldots, 2n$ дается метод построения неотрицательного четного тригонометрического полинома порядка m с монотонными положительными коэффициентами, свободный член которого не превосходит $3a_0$. При этом сохраняются такие свойства коэффициентов, как, например, целочисленность. Указываются применения результатов такого вида.

For arbitrary non-negative even trigonometric polynomial of the degree n with monotone positive coefficients and the free term a_0 and for each natural number $m = 1, \ldots, 2n$ the method of construction of non-negative even trigonometric polynomial of the degree m with monotone positive coefficients the free term of which does not exceed $3a_0$ is given. In this case some properties of the coefficients as, for instance, to be integers, are conserved. The applications of the results of such kind are indicated.

УДК 517.5.

В некоторых экстремальных задачах экстремальным является четный тригонометрический полином вида

$$T_n(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k \cos(kx)\,, \quad n \in \{1, 2, \ldots\}, \tag{1}$$

у которого коэффициенты монотонны, т. е. удовлетворяют условию

$$2a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0. \tag{2}$$

Если тригонометрический полином (1) неотрицателен, т. е. удовлетворяет условию

$$T_n(x) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x, \tag{3}$$

то

$$2a_0 - a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\,(1 - \cos x)\,dx \geqslant 0. \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00062) и гранта INTAS (проект 99-01080).

Пусть $\mathbb{T}_n^+$ — множество всех неотрицательных тригонометрических полиномов вида (1). В известном результате Л. Фейера (см. [5, отд. 6, § 7, задача 52])

$$2\cos\Big(\frac{\pi}{n+2}\Big) = \max\{a_1 : T_n \in \mathbb{T}_n^+,\ a_0 = 1\}$$

единственный экстремальный полином

$$U_n(x) = \frac{2}{n+2}\Big|\sum_{k=0}^{n} \sin((k+1)\alpha_n)e^{ikx}\Big|^2 =$$
$$= \frac{2}{n+2}\sin^2(\alpha_n)\Big|\frac{\cos((n+2)x/2)}{\cos x - \cos\alpha_n}\Big|^2 = \sum_{k=0}^{n} b_k^n \cos(kx),$$

где $\alpha_n = \pi/(n+2)$, $b_0^n = 1$,
$b_k^n = \dfrac{(n-k+3)\sin((k+1)\alpha_n) - (n-k+1)\sin((k-1)\alpha_n)}{(n+2)\sin\alpha_n}$, удовлетворяет условию $2 = 2b_0^n > 2\cos(\pi/(n+2)) = b_1^n > \cdots > b_n^n > 0$, т. е. имеет монотонные коэффициенты.

Можно привести и другие примеры экстремальных задач, в которых экстремальным является полином вида (1) с монотонными коэффициентами. Например, в экстремальной задаче (см. [1])

$$M(n) = \min\{a_0 : T_n \in \mathbb{T}_n^+,\ a_1 \geqslant 1, \ldots, a_n \geqslant 1\}$$

коэффициенты единственного экстремального полинома

$$V_n(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k^n \cos(kx)$$

удовлетворяют условиям

$$2M(n) = 2a_0^n > a_1^n > \cdots > a_{n-[n/2]}^n = \cdots = a_n^n = 1$$

и

$$2a_0^n - a_1^n > a_1^n - a_2^n > \cdots > a_{n-[n/2]-1}^n - a_{n-[n/2]}^n > 0;$$

в частности, полином V_n имеет монотонные коэффициенты.

Здесь и далее квадратные скобки обозначают целую часть числа. Приведенные примеры отчасти объясняют интерес к изучению свойств тригонометрических полиномов с монотонными коэффициентами.

Если тригонометрический полином (1) неотрицателен, то для любого натурального числа d имеем

$$\sum_{k=0}^{[n/d]} a_{kd}\cos(kx) = \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} T_n\Big(\frac{x+2\pi k}{d}\Big) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x.$$

В частности, если натуральное число m является делителем натурального числа n, то при $d = n/m$ получаем, что из неотрицательности полинома (1) следует оценка

$$\sum\nolimits_{k=0}^{m} a_{kn/m}\cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x.$$

Цель этой статьи — обобщить последнее утверждение на случай, когда m необязательно является делителем числа n. Будут также указаны применения полученных результатов.

Основным результатом этой статьи является следующая

Теорема. *Пусть* n *— натуральное число и тригонометрический полином* (1) *неотрицателен и удовлетворяет условиям*

$$a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0. \tag{5}$$

Тогда

1) *для каждого натурального числа* $m = 1, \ldots, n$ *полином*

$$3a_0 + \sum\nolimits_{k=1}^{m} a_{[kn/m]} \cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{\textit{при всех} } x; \tag{6}$$

2) *для каждого натурального числа* $m = 1, \ldots, 2n$ *полином*

$$\Big(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) a_0 + \sum\nolimits_{k=1}^{m} a_{[kn/m+1/2]} \cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{\textit{при всех} } x. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть тригонометрический полином (1) удовлетворяет условиям (3) и (5). Тогда, в силу (4), он удовлетворяет условиям (2). Будем считать, что $a_k = 0$ при всех $k > n$. Пусть $I_k = [k-1/2, k+1/2)$, $\beta_k = k-1/2$, $a(t) = a_k$ при $t \in I_k$ для всех $k \geqslant 1$ и $a(t) = 2a_0$ при $t \in [0, 1/2)$. Тогда $a(t) = a_{[t+1/2]}$ при всех $t \geqslant 1/2$, $a(t) = 0$ при $t \geqslant n + 1/2$ и функция $a(t)$ неотрицательна и не возрастает на $[0, \infty)$. Возьмем произвольное $\gamma \geqslant 1/2$ и произвольные точки

$$t_k \in [\, k - 1/2\,, k + 1/2\,] \quad \text{при } k = 1, \ldots, 2n+1. \tag{8}$$

Положим

$$B(x) = \max_{k=1,\ldots,2n+1} \max\Big\{ \sin\Big(\frac{x}{2}\Big(t_k - k + \frac{1}{2}\Big)\Big),\ \sin\Big(\frac{x}{2}\Big(k + \frac{1}{2} - t_k\Big)\Big)\Big\}. \tag{9}$$

Если $x \in (0, 2\pi]$, то

$$\int_0^\infty a(t)\, \cos(tx)\, dt = 2a_0 \int_0^{1/2} \cos(tx)\, dt + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{I_k} \cos(tx)\, dt = \\ = \frac{\sin(x/2)}{x/2}\, T_n(x) \geqslant 0.$$

Поэтому при $x \in (0, 2\pi\gamma]$ имеем

$$\int_0^{2n+1} a(\gamma t)\, \cos(tx)\, dt = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty a(t)\, \cos\Big(t\, \frac{x}{\gamma}\Big)\, dt \geqslant 0.$$

Возьмем произвольное $x \in (0, \pi]$. Тогда

$$\int_0^{1/2} a(\gamma t)\, \cos(tx)\, dt + \sum_{k=1}^{2n+1} a(\gamma t_k) \int_{I_k} \cos(tx)\, dt + \\ + \sum_{k=1}^{2n+1} \int_{I_k} (a(\gamma t) - a(\gamma t_k))\, \cos(tx)\, dt = \int_0^\infty a(\gamma t)\, \cos(tx)\, dt \geqslant 0. \tag{10}$$

По теореме Бонне о среднем значении для каждого натурального $k = 1, \dots, 2n+1$ найдутся такие точки $v_k \in [k-1/2\,, t_k]$ и $w_k \in [t_k\,, k+1/2]$, что

$$\int_{k-1/2}^{t_k} (a(\gamma t) - a(\gamma t_k))\, \cos(tx)\, dt = (a(\gamma\beta_k) - a(\gamma t_k)) \int_{k-1/2}^{v_k} \cos(tx)\, dt$$

и

$$\int_{t_k}^{k+1/2} (a(\gamma t) - a(\gamma t_k))\, \cos(tx)\, dt = (a(\gamma\beta_{k+1}) - a(\gamma t_k)) \int_{w_k}^{k+1/2} \cos(tx)\, dt.$$

Заметим, что в силу (9)

$$\Big| \int_{k-1/2}^{v_k} \cos(tx)\, dt \Big| \leqslant \frac{2}{x} \sin\Big(\frac{x}{2}\Big(v_k - k + \frac{1}{2}\Big)\Big) \leqslant \\ \leqslant \frac{2}{x} \sin\Big(\frac{x}{2}\Big(t_k - k + \frac{1}{2}\Big)\Big) \leqslant \frac{2}{x} B(x),$$

$$\Big| \int_{w_k}^{k+1/2} \cos(tx)\, dt \Big| \leqslant \frac{2}{x} \sin\Big(\frac{x}{2}\Big(k + \frac{1}{2} - w_k\Big)\Big) \leqslant \\ \leqslant \frac{2}{x} \sin\Big(\frac{x}{2}\Big(k + \frac{1}{2} - t_k\Big)\Big) \leqslant \frac{2}{x} B(x).$$

Поэтому

$$\Big| \int_{I_k} (a(\gamma t) - a(\gamma t_k))\, \cos(tx)\, dt \Big| \leqslant \frac{2}{x} B(x) \Big(a\Big(\gamma\Big(k - \frac{1}{2}\Big)\Big) - a\Big(\gamma\Big(k + \frac{1}{2}\Big)\Big)\Big).$$

Отсюда и из (10) имеем

$$2\, a_0 \int_0^{1/2} \cos(tx)\, dt + \sum_{k=1}^{2n+1} a(\gamma t_k) \int_{I_k} \cos(tx)\, dt + \frac{2}{x}\, B(x)\, a\Big(\frac{\gamma}{2}\Big) \geqslant 0,$$

т. е.

$$a_0 + \sum_{k=1}^{2n+1} a(\gamma t_k)\, \cos(kx) + \frac{B(x)}{\sin(x/2)}\, a\Big(\frac{\gamma}{2}\Big) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x \in (0, \pi].$$

Отметим, что если $\theta \in (0,1)$, то функция

$$\frac{\sin(\theta x/2)}{\sin(x/2)}$$

как функция от x строго возрастает на интервале $(0, 2\pi)$, поскольку ее производная

$$\frac{\sin(\theta x/2)}{x \sin(x/2)} \Big(\frac{\theta x}{2} \operatorname{ctg}\Big(\frac{\theta x}{2}\Big) - \frac{x}{2} \operatorname{ctg}\Big(\frac{x}{2}\Big) \Big) > 0 \quad \text{при } x \in (0, 2\pi).$$

Значит, для любого $x_0 \in (0, \pi]$ в силу (9) имеем

$$a_0 + \sum_{k=1}^{2n+1} a(\gamma t_k)\, \cos(kx) + \frac{B(x_0)}{\sin(x_0/2)}\, a\Big(\frac{\gamma}{2}\Big) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x \in [0, x_0]. \quad (11)$$

Сначала в (11) положим $x_0 = \pi$ и заметим, что $B(\pi) \leq 1$. Получим

$$a_0 + a\Big(\frac{\gamma}{2}\Big) + \sum_{k=1}^{2n+1} a(\gamma t_k)\, \cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x. \quad (12)$$

Оценка (12) верна для любых $\gamma \geqslant 1/2$ и точек $\{t_k\}_{k=1}^{2n+1}$, которые удовлетворяют условию (8). Положим в (12), что $t_k = k - v$, где $|v| \leqslant 1/2$. Получим оценку

$$3\, a_0 + \sum_{k=1}^{2n+1} a(\gamma(k - v))\, \cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x, \quad (13)$$

которая верна для всех $\gamma \geqslant 1/2$ и $|v| \leqslant 1/2$. Если, в частности, в (13) положить $v = 1/(2\gamma)$, то приходим к оценке

$$3\, a_0 + \sum_{k=1}^{2n+1} a_{[\gamma k]}\, \cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x \text{ и всех } \gamma \geqslant 1. \quad (14)$$

Таким образом, если полином (1) неотрицателен и удовлетворяет условию (5), то обязательно верна оценка (14). Если в (14) взять $\gamma = n/m$, то получим оценку (6).

Снова вернемся к неравенству (11) и положим в нем $t_k = k$, $x_0 = 2\pi/3$. Из (9) видим, что в этом случае $B(x_0) \leqslant \sin(x_0/4)$. Поэтому из (11) для любого $\gamma \geqslant 1/2$ имеем

$$a_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\, a\Big(\frac{\gamma}{2}\Big) + \sum_{k=1}^{2n+1} a(\gamma k)\, \cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{при всех} x \in [0, 2\pi/3]. \quad (15)$$

Но если $x \in [2\pi/3\,, \pi]$, то

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a(\gamma k)\, \cos(kx)\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} (a(\gamma k) - a(\gamma(k+1)))\frac{\sin((k+1/2)x)}{2\sin(x/2)} - \frac{a(\gamma)}{2}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a(\gamma)}{2\sin(x/2)} + \frac{a(\gamma)}{2} \leqslant \frac{a_1}{\sqrt{3}} + \frac{a_1}{2}.$$

Отсюда и из (2) и (15) получаем, что

$$\Big(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) a_0 + \sum_{k=1}^{2n+1} a(\gamma k)\, \cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{при всех} x \text{и} \gamma \geqslant 1/2. \quad (16)$$

Если в (16) положим $\gamma = n/m$, то сразу приходим к оценке (7).

Теорема полностью доказана и даже доказаны несколько более общие оценки (14) и (16).

Отметим, что данная теорема была анонсирована в [3].

Теперь укажем одно из ее приложений.

Для каждого натурального числа n обозначим (см. [2, 4])

$$M_Z^{\downarrow}(n) = \min a_0,$$

где минимум берется по всем неотрицательным полиномам вида (1) с натуральными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$, которые удовлетворяют условию (5). Ясно, что найдутся такие натуральные коэффициенты $a_1^n \geqslant \cdots \geqslant a_n^n \geqslant 1$, что

$$M_Z^{\downarrow}(n) + \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_k^n \cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x.$$

Применяя доказанную теорему, получим, что для каждого натурального числа $m = 1, \ldots, 2n$ полином

$$T_m(x) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) M_Z^{\downarrow}(n) + \sum_{k=1}^{m} a_{[kn/m+1/2]}^n \cos(kx)$$

неотрицателен. Отсюда сразу вытекает

Следствие. *Для каждого натурального числа n верна оценка*

$$M_Z^{\downarrow}(m) \leq\geqslant \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) M_Z^{\downarrow}(n) \quad \textit{при всех } m = 1, \ldots, 2n.$$

Отметим, что это следствие улучшает соответствующую оценку из [4, следствие 3.3].

Из теоремы следует существование такой абсолютной положительной постоянной A, например $A = 1+\frac{2}{\sqrt{3}}$, что для каждого неотрицательного тригонометрического полинома (1) с монотонными коэффициентами, т. е. удовлетворяющего условию (5), и для каждого натурального числа m найдутся такие натуральные числа $1 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_m \leqslant n$, что

$$A\, a_0 + \sum\nolimits_{k=1}^{m} a_{s_k} \cos(kx) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x.$$

Интересен, на наш взгляд, вопрос о наилучшей постоянной A в последнем утверждении. Ответ на него пока не найден. Неизвестно даже, можно ли взять $A = 1$ или нет. Следствие показывает, что результаты такого вида полезны при изучении экстремальных задач на неотрицательных тригонометрических полиномах с монотонными коэффициентами.

Библиографический список

1. *Белов А. С.* Об одной экстремальной задаче о минимуме тригонометрического полинома // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57. № 6. С. 212—226.

2. *Белов А. С.* Новые примеры неотрицательных тригонометрических полиномов с целыми коэффициентами // Фундамент. и приклад. математика. 1995. Т. 1. № 3. С. 581—612.
3. *Белов А. С.* О свойствах неотрицательных тригонометрических полиномов с монотонными коэффициентами // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 8-й Саратовской зимней школы (30 янв. – 6 февр. 1996 г.). Саратов, 1996. С. 16.
4. *Белов А. С., Конягин С. В.* Об оценке свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома с целыми коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60. № 6. С. 31—90.
5. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М., 1972. Ч. 2. 431 с.