Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2001 С. 116 – 120

С. Р. Когаловский

ПРОСТЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ГРУППАХ С МУЛЬТИОПЕРАТОРАМИ

Замечается, что всякая группа с конечным множеством мультиоператоров рационально эквивалентна универсальной алгебре с одной операцией. Доказывается также, что для всякой группы $\mathbb{A}$ со счетным множеством мультиоператоров существует алгебра $\mathbb{B}$ с одной операцией такая, что $\operatorname{Con}\mathbb{A} \cong \operatorname{Con}\mathbb{B}$.

It is proved that any group with a finite set of multiple operators (in the sense of P. Higgins) is equivalent to an algebra with an unique operation. This implies the following: let $\mathbb{A}$ be a group with a countable set of multiple operators. Then $\operatorname{Con}\mathbb{A} \cong \operatorname{Con}\mathbb{B}$ for some algebra $\mathbb{A}$ with an unique operation.

УДК 512.57.

$\mathcal{K}_1$ будет обозначать класс, состоящий из всевозможных алгебр, решетки конгруэнций которых изоморфны решеткам конгруэнций алгебр с одной операцией.

$\mathcal{K}_2$ будет обозначать класс всевозможных алгебр $\mathbb{A}$, на носителях которых существуют такие алгебры $\mathbb{B}$ с одной операцией, что $\operatorname{Con}\mathbb{A} = \operatorname{Con}\mathbb{B}$.

Алгебры с одним и тем же носителем и одним и тем же клоном будем, следуя А. И. Мальцеву, называть рационально эквивалентными. $\mathcal{K}_3$ будет обозначать класс всевозможных алгебр, рационально эквивалентных алгебрам с одной операцией, т. е. алгебр с однопорожденными клонами. Ясно, что $\mathcal{K}_3 \subset \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_1$.

В первой части настоящей статьи использованием простого замечания мы находим некоторый вид многообразий алгебр, включающихся в $\mathcal{K}_2$ и устанавливаем, что группы с конечными множествами мультиоператоров (в смысле Хиггинса [2]) принадлежат $\mathcal{K}_3$. Во второй части находится вид многообразий алгебр со счетными множествами операций, включающихся в $\mathcal{K}_1$. К таким многообразиям относятся, в частности, всевозможные многообразия групп со счетными множествами мультиоператоров.

1. n-арную операцию f в алгебре $\mathbb{A}$ будем называть квазипроекцией, если существуют номер i и нульарные операции $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n$ такие, что $\mathbb{A}$ удовлетворяет тождеству

$$f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \ldots, c_n) = x.$$

Пусть операции f_1 и f_2 в $\mathbb{A}$ удовлетворяют тождествам

$$f_1(c_1,\dots,c_{k-1},x,c_{k+1},\dots,c_m)=x \text{ и } f_2(d_1,\dots,d_{r-1},x,d_{r+1},\dots,d_n)=x,$$

где c_i, d_j — нульарные операции. Тогда операция

$$F(x_1,\dots,x_{k-1},y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_{m-k}) = \\ = f_1(x_1,\dots,x_{k-1},f_2(y_1,\dots,y_n),z_1,\dots,z_{m-k})$$

такова, что

$$F(x_1,\dots,x_{k-1},d_1,\dots,d_{r-1},x_k,d_{r+1},\dots,d_n,x_{k+1},\dots,x_m) = \\ = f_1(x_1,\dots,x_m),$$

$$F(c_1,\dots,c_{k-1},x_1,\dots,x_n,c_{k+1},\dots,c_m)=f_2(x_1,\dots,x_n).$$

Отсюда и из того, что F — квазипроекция, следует

Замечание 1. *Пусть алгебра $\mathbb{A}=(A;f_1,\dots,f_n,c_1,\dots,c_p)$ такова, что $f_1,\dots,f_n$ — квазипроекции, а $c_1,\dots,c_p$ — нульарные операции. Тогда $\mathbb{A}$ рационально эквивалентна некоторой алгебре $(A;F,c_1,\dots,c_p)$ (а значит, $\mathbb{A}$ входит в $\mathcal{K}_2$). Если при этом для каждой c_i клон алгебры $(A;f_1,\dots,f_n)$ содержит операцию с единственным значением c_i, то $\mathbb{A}$ входит в $\mathcal{K}_3$.*

Группоидом с мультиоператорами будем называть всякую алгебру $\mathbb{A}=(A;+,\mathrm{o},f_1,\dots,f_n)$, удовлетворяющую тождествам

$$x+\mathrm{o}=x,$$
$$o+x=x,$$
$$f_i(o,\dots,o)=o \quad (i=1,\dots,n).$$

Пусть $\mathbb{A}$ — группоид с мультиоператорами и

$$g_i(x_1,\dots,x_p,y)=f_i(x_1,\dots,x_p)+y \quad (i=1,\dots,n).$$

Так как $f_i(x_1,\dots,x_p)=g_i(x_1,\dots,x_p,o)$, то алгебра

$$\mathbb{B}=(A;+,g_1,\dots,g_n,o)$$

рационально эквивалентна $\mathbb{A}$ и удовлетворяет тождествам

$$g_i(o,\dots,o,x)=x.$$

Так как операции $+$, g_1, …, g_n — квазипроекции, то согласно замечанию 1 $\mathbb{B}$ рационально эквивалентна некоторой алгебре $(A;F,o)$. Таким образом, справедливо

Замечание 2. *Всякий группоид с конечным множеством мультиоператоров рационально эквивалентен некоторой алгебре $(A;F,o)$, где o — нульарная операция.*

Отсюда, в частности, следует, что всякое векторное пространство над конечным полем входит в $\mathcal{K}_2$ (ср. [3]).

Пусть $\mathbb{A}=(A;+,\mathrm{o},-,f_1,\dots,f_n)$ — группа с мультиоператорами. Из замечания 2 следует, что она входит в $\mathcal{K}_2$. А т. к. она удовлетворяет тождеству $x-x=\mathrm{o}$, то согласно замечанию 1 $\mathbb{A}$ входит в $\mathcal{K}_3$. Таким образом, справедливо

Замечание 3. *Всякая группа с конечным множеством мультиоператоров входит в* $\mathcal{K}_3$.

Отсюда, в частности, следует, что всякое кольцо входит в $\mathcal{K}_3$ ([1]). Отсюда же следует, что всякое векторное пространство над конечным полем входит в $\mathcal{K}_3$.

2. Пусть $\mathbb{A} = (A; +, \mathrm{o}, f_1, \dots, f_n, \dots)$ — группоид со счетным множеством мультиоператоров и пусть для всякого номера n арность f_n равна n. Обозначим через B множество всевозможных бесконечных последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ с членами из A, у каждой из которых все члены, начиная с некоторого, равны o. Для всякого $a \in A$ будем обозначать через a^* последовательность $(a, \mathrm{o}, \mathrm{o}, \dots, \mathrm{o}, \dots)$. Множество $\{a^* : a \in A\}$ будем обозначать через A^*.

g будет обозначать бинарную операцию на B такую, что

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$$

для всяких $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$.

Пусть

$$g_2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = g(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2),$$
$$g_{n+1}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{n+1}) = g(\mathbf{x}^1, g_n(\mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{n+1})).$$

Ясно, что $g_m(x_1^*, \dots, x_m^*) = (x_1, \dots, x_m, o, o, \dots, o, \dots)$.

Для всякой унарной операции t на каком-нибудь множестве через $t^1(a)$ будем обозначать $t(a)$, через $t^{n+1}(a)$ — $t(t^n(a))$.

g_- будет обозначать унарную операцию на B такую, что

$$g_-(\mathbf{x}) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Ясно, что $g_-^m(\mathbf{x}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$, $\mathbf{x} \in A^* \Leftrightarrow g_-^i(\mathbf{x}) = g_-^j(\mathbf{x})$ для всяких i и j и $\mathbf{x} = \mathrm{o}^* \Leftrightarrow \mathbf{x} = g_-(\mathbf{x})$.

g_0 будет обозначать унарную операцию на B такую, что

$$g_0(\mathbf{x}) = (x_1, o, o, \dots, o, \dots).$$

Ясно, что $x_{m+1}^* = g_0(g_-^m(\mathbf{x}))$.

Через $\oplus$ обозначим бинарную операцию на B такую, что

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots).$$

Через h обозначим унарную операцию на B такую, что

$$h(\mathbf{x}) = (x_1, f_1(x_1), x_2, x_3, f_2(x_2, x_3), x_4, x_5, x_6, f_3(x_4, x_5, x_6), \dots).$$

Через $\mathbb{B}$ обозначим алгебру $(B; \mathrm{o}^*, g, g_-, g_o, \oplus, h)$. Покажем, что $\mathrm{Con}\,\mathbb{B} \cong \mathrm{Con}\,\mathbb{A}$.

Пусть Δ — отображение $\mathrm{Con}\,\mathbb{A}$ в $\mathrm{P}(B \times B)$ такое, что

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta \Leftrightarrow (\forall n)(x_n \equiv y_n(\Theta))$$

для всякой конгруэнции Θ на $\mathbb{A}$ и всяких $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$ из $\mathbb{B}$. Δ взаимно однозначно и изотонно вместе с обратным отображением. Ясно и то, что значения Δ — конгруэнции на $\mathbb{B}$.

Пусть ∇ — отображение $\mathrm{Con}\mathbb{B}$ в $\mathrm{P}(A \times A)$ такое, что

$$(a, b) \in \nabla\Theta \Leftrightarrow a^* \equiv b^*(\Theta)$$

для всякой конгруэнции Θ на $\mathbb{B}$ и всяких a и b из A. Это отображение изотонно и его значения — эквивалентности на A.

Более того, значения ∇ — конгруэнции на $\mathbb{A}$. В самом деле, пусть $a \equiv b(\nabla\Theta)$. Тогда $a^* \equiv b^*(\Theta)$, а значит, $h(a) \equiv h(b)$ (Θ), т. е.

$$(a, f_1(a), o, o, \dots) \equiv (b, f_1(b), o, o, \dots)\ (\Theta).$$

Отсюда $g_-(h(a)) \equiv g_-(h(b))$ (Θ), а значит, $f_1(a) \equiv f_1(b)$ $(\nabla\Theta)$. Таким образом, $\nabla\Theta$ стабильно относительно f_1.

Покажем теперь, что $\nabla\Theta$ стабильно относительно f_2. Пусть $a_1 \equiv a_2$ $(\nabla\Theta)$ и $b_1 \equiv b_2$ $(\nabla\Theta)$. Тогда $a_1^* \equiv a_2^*$ (Θ) и $b_1^* \equiv b_2^*$ (Θ). Отсюда $g_-^4(h(g_3((o^*, a_1^*, a_2^*)))) \equiv g_-^4(h(g_3((o^*, b_1^*, b_2^*))))$ (Θ), т. е.

$$g_-^4(h((o, a_1, a_2, o, o, \dots))) \equiv g_-^4(h((o, b_1, b_2, o, o, \dots)))\ (\Theta),$$

откуда $f_2(a_1, a_2) \equiv f_2(b_1, b_2)$ $(\nabla\Theta)$. И т. д.

Пусть $a_1 \equiv a_2$ $(\nabla\Theta)$ и $b_1 \equiv b_2$ $(\nabla\Theta)$. Тогда $a_1^* \equiv a_2^*$ (Θ) и $b_1^* \equiv b_2^*$ (Θ). Отсюда $a_1^* \oplus b_1^* \equiv a_2^* \oplus b_2^*$ (Θ), т. е. $(a_1 + b_1)^* \equiv (a_2 + b_2)^*$ (Θ), что равносильно $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2$ $(\nabla\Theta)$.

Таким образом, $\nabla\Theta$ стабильно относительно всех операций в $\mathbb{A}$, а значит, является конгруэнцией на $\mathbb{A}$.

Покажем, что $\Theta \subset \Delta\nabla\Theta$ для всякой конгруэнции Θ на $\mathbb{B}$.

В самом деле, пусть $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$ (Θ). Тогда $g_0(\mathbf{x}) \equiv g_0(\mathbf{y})$ (Θ) и $g_0(g_-^n(\mathbf{x})) \equiv g_0(g_-^n((\mathbf{y})))$ (Θ) для всякого n. Отсюда $x_n \equiv y_n$ $(\nabla\Theta)$ для всякого n. Но тогда $x_n^* \equiv y_n^*$ $(\Delta\nabla\Theta)$ для всякого n, а значит,

$$g_n((x_1^*, \dots, x_n^*)) \equiv g_n((y_1^*, \dots, y_n^*))\ (\Delta\nabla\Theta),$$

т. е.

$$(x_1, \dots, x_n, o, o, \dots) \equiv (y_1, \dots, y_n, o, o, \dots)\ (\Delta\nabla\Theta)$$

для всякого n. В частности, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$ $(\Delta\nabla\Theta)$.

Теперь покажем, что $\Delta\nabla\Theta \subset \Theta$ для всякой конгруэнции Θ на $\mathbb{B}$.

В самом деле, пусть $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$ $(\Delta\nabla\Theta)$, т. е. $x_n \equiv y_n$ $(\nabla\Theta)$, а значит, $x_n^* \equiv y_n^*$ (Θ) для всякого n. Но тогда $g_n(x_1^*, \dots, x_n^*) \equiv g_n(y_1^*, \dots, y_n^*)$ (Θ) для всякого n, т. е. $(x_1, \dots, x_n, o, o, \dots) \equiv (y_1, \dots, y_n, o, o, \dots)$ (Θ) для всякого n. В частности, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$ (Θ).

Таким образом, $\Delta\nabla\Theta = \Theta$ для всякой конгруэнции Θ на $\mathbb{B}$. А т. к. Δ взаимно однозначно и изотонно вместе с обратным отображением, то $\mathrm{Con}\,\mathbb{B} \cong \mathrm{Con}\,\mathbb{A}$.

Так как $g(o^*) = o^*$, $g_-(o^*) = o^*$, $g_0(o^*) = o^*$, $h(o^*) = o^*$, $o^* + \mathbf{x} = \mathbf{x} + o^* = \mathbf{x}$ для всякого $\mathbf{x} \in B$, то $\mathbb{B}$ — группоид с мультиоператорами. Согласно замечанию 2 $\mathbb{B} \in \mathcal{K}_2$, а значит, справедливо

Замечание 4. *Всякий группоид со счетным множеством мультиоператоров принадлежит* $\mathcal{K}_1$.

Отсюда, в частности, следует, что всякое векторное пространство над счетным полем принадлежит $\mathcal{K}_1$.

Библиографический список

1. *Соркин Ю. И.* Кольца как множества с одной операцией, подчиненной единственному тождеству. // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 4. С. 357 – 362.
2. *Higgins P. J.* Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. Vol. 6. 1956. P. 366—416.
3. *McKenzie R.* Finite forbidden lattices // Lect. Notes Math. 1983. № 1004. P. 176—205.