Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2001 С. 120 – 126

Д. И. Коровин

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ ПОСТРОЕНИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассматривается распределение произведения $g(n) = g_1 g_2 \cdots g_n$ случайных матриц унимодулярной группы третьего порядка. Строится аналог преобразования Фурье, и с его помощью моделируются случайные величины в евклидовом пространстве с соответствующими распределениями.

The distribution of the product of random matrixes $g(n) = g_1 g_2 \dots g_n$ from unimodular group G of third order is considered. For the analysis some analog of Fourier transform is constructed and by means of this transform the random variables with corresponding stochastic measures in the Euclidean space are simulated.

УДК 519.2.

Теория предельных теорем для произведения случайных матриц стала частью современной теории вероятностей не столь давно. Однако ее широкие приложения в различных областях физики, математики привлекают все большее число исследователей. Наибольший интерес представляет некомпактный случай, который существенно отличается от описанного в ставших уже классическими работах 40-х гг., когда произведения случайных матриц лежат в некоторой компактной группе.

Рассматривается распределение произведения $g(n) = g_1 g_2 \cdots g_n$ различно распределенных случайных матриц $g_1, g_2, \dots, g_n$ из группы G комплексных унимодулярных матриц порядка 3. На этой группе рассматриваются слабо симметричные меры μ, т. е. удовлетворяющие условию: $\mu(u^{-1}Au) = \mu(A)$ для борелевских $A \subseteq G$ и любых $u \in U$, где U — унитарная подгруппа G. Данное ограничение не является слишком узким: оно выражает инвариантность распределения вероятностей линейного оператора, задаваемого случайной матрицей $g \in G$, при произвольном изменении ортогонального базиса, что не лишено физического смысла.

Вопросы, возникающие при исследовании поведения $g(n)$ при $n \to \infty$, можно разделить на традиционные (например, доказательство некоторого аналога предельной теоремы в евклидовом пространстве) и специфические, появляющиеся в связи с применением новых для классической теории предельных теорем методов и особенностей пространства, в котором рассматриваются меры. Был получен результат [2], который можно интерпретировать как обобщение различия всех одномерных показателей

Ляпунова для произведения случайных различно распределенных независимых матриц.

Результаты, полученные различными авторами, изучающими произведение случайных матриц, в основном касались одинаково распределенных сомножителей. Первые утверждения о различно распределенных сомножителях приведены в работах В. Н. Тутубалина [3, 4]. Однако результаты, касающиеся композиции различных слабо симметричных мер на группе унимодулярных матриц порядка 3, впервые рассматривались в [2]. Было доказано также утверждение о том, что последовательность матриц $g(n)$ правильно уходит на бесконечность [1].

Определение. *Последовательность матриц $g(n)$ правильно уходит на бесконечность, если*

$$\rho(g(n)) = \rho(k(n)) = \min_{i=2,3}(t_i(n) - t_{i-1}(n)) \to \infty \quad \textit{при } n \to \infty$$

по вероятности, где $t(n) = (t_1(n), t_2(n), t_3(n))$ — вектор логарифмов диагональных элементов матрицы $k(n)$ в представлении случайного элемента $g(n) = k(n)u(n)$, $k(n)$ — верхняя треугольная матрица с положительными элементами на диагонали.

Для случая одинаково распределенных матриц вопрос о правильном уходе на бесконечность эквивалентен вопросу о несовпадении показателей Ляпунова для последовательности $g(n)$. Это, в свою очередь, позволяет сделать достаточно важные утверждения о поведении $g(n)$ при $n \to \infty$. В рассматриваемом случае этот факт не только позволил доказать аналог предельной теоремы для композиции различных слабо симметричных мер на группе унимодулярных матриц порядка 3, но, повидимому, в дальнейшем поможет получить и другие результаты.

Определение. *Будем говорить, что последовательность матриц $g(n) = g_1 g_2 \cdots g_n$ уходит на бесконечность, если*

$$\tau_3(n) = \max(\tau_1(n), \tau_2(n), \tau_3(n)) \to \infty \quad \textit{при } n \to \infty,$$

где $g(n) = u_1(n)\delta(n)u_2(n)$, $u_i \in U$ — унитарная подгруппа группы G, $i = 1, 2$, $\delta(n) \in \Delta$, Δ — множество диагональных матриц вида $\delta = diag(exp\,\tau_1, exp\,\tau_2, exp\,\tau_3)$, $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_3$, $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$.

Теорема 1. *Если произведение $g(n) = g_1 g_2 \cdots g_n$ случайных независимых матриц из G, распределение которых имеет слабо симметричные меры μ_i, уходит на бесконечность, то уход этот является правильным.*

Пусть

$$\varPhi(\chi, \tau) = \frac{2\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \exp(i\chi_2 + 2)\tau_1 & \exp(i\chi_2 + 2)\tau_2 & \exp(i\chi_2 + 2)\tau_3 \\ \exp(i\chi_3 + 4)\tau_1 & \exp(i\chi_3 + 4)\tau_2 & \exp(i\chi_3 + 4)\tau_3 \end{vmatrix}}{(\chi_2 - 2i)(\chi_3 - 4i)(\chi_3 - \chi_2 - 2i)sh(\tau_3 - \tau_2)sh(\tau_3 - \tau_1)sh(\tau_2 - \tau_1)}$$

— зональная сферическая функция, с так выбранными параметрами $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$, чтобы им соответствовали некоторые представления группы G.

Определение. *Меру m_i, определенную на евклидовой плоскости, назовем соответствующей слабо симметричной мере μ_i, если удовлетворяется соотношение: для любого измеримого множества* A*

$$m_i(A^*) = \int\limits_D F_\tau(A^*)\, d\mu_i, \tag{1}$$

где $F_\tau(A^*)$ — обратное преобразование Фурье функции $\Phi(\chi, \tau)$ по аргументу χ.

Функция

$$f_i(\chi) = \int\limits_D \Phi(\chi, \tau) d\mu_i$$

должна быть характеристической функцией мер μ_i и m_i.

Теорема 2. *Пусть μ_i — слабо симметричные меры на группе G унимодулярных матриц g_i порядка 3. Пусть (τ_1, τ_2, τ_3) — вектор логарифмов диагональных элементов диагональной матрицы δ из представления $g = u_1 \delta u_2$ такой, что $\tau_1 = -\tau_2 - \tau_3$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$. Пусть $\mu(n)$ — мера распределения элемента $g(n) = g_1 g_2 \cdots g_n$, m_i — соответствующие μ_i распределения на плоскости. Для сближения последовательности мер $m(n) = m_1 * m_2 * \cdots * m_n$ с мерой нормального распределения с некоторыми параметрами $a(n)$, $\sigma(n)$ достаточно, чтобы носители мер μ_i содержались в компакте K_{ρ_0}, лежащем в области $O_{a,M} = \{(\tau_2, \tau_3) : M > \tau_3,\ \max(|\tau_3 - \tau_2|, |2\tau_3 + \tau_2|) > a\}$, a и* M *достаточно большие.*

Теорема 2 является попыткой обобщить предельную теорему на случай слабо симметричных матриц $SL(3, \mathbb{C})$. Однако множество, в котором могут находиться носители мер μ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, кажется “недостаточно большим”.

Попытки указать область или условия, определяющие возможность применения предельной теоремы в более общем случае, пока не привели к успеху. Это объясняется сложностью оценки коэффициента корреляции $\rho(n)$. Результатов, не требующих сложных аналитических выводов и способных указать на ограниченность $\rho(n)$ при более общих условиях, накладываемых на носители μ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, не получено.

Тем не менее кажется вполне вероятным, что утверждение теоремы верно и для более широкой области.

Для получения более ясного представления о поведении мер $\mu(n)$ при $n \to \infty$ и виде функции плотности распределения рассматривалось моделирование поведения параметров распределения $\mu(n)$ при $n \to \infty$ и реализовывался метод моделирования случайных величин на плоскости, которым соответствует распределение $\mu(n) = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n$.

Генерировалось случайное распределение g_i, определяемое набором случайных точек (t_{2ji}, t_{3ji}), для которых

$$P(g_i : \tau_2 = t_{2ji}, \tau_3 = t_{3ji}) = k_{ji},\ j = 1, 2, \ldots, N, \quad \sum_{i=1}^{N} k_{il} = 1,$$

где N — число различных точек.

Будем обозначать случайную величину с распределением m_i, соответствующим мере μ_i, как $\xi_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$. Так как моменты распределений μ_i и m_i совпадают, то будем обозначать их как $M\xi_{i,1}$, $M\xi_{i,2}$, $D\xi_{i,1}$, $D\xi_{i,2}$, $\mathrm{Cov}(\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$.

Носители генерируемых случайных величин в пространстве M выбирались в области $\{(\tau_2, \tau_3) : 2 < \tau_3 < 12,\ \tau_3/2 < \tau_2 < \tau_3\}$. Для выполнения сходимости $\zeta(n) = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ к нормальному закону необходимо, чтобы были отделены от 0 выражения

$$D\xi_{i,1} - \frac{\mathrm{cov}^2(\xi_{i,1}, \xi_{i,2})}{D\xi_{i,2}}, \quad D\xi_{i,2} - \frac{\mathrm{cov}^2(\xi_{i,1}, \xi_{i,2})}{D\xi_{i,1}}.$$

Число сомножителей n $g(n) = g_1 g_2 \cdots g_n$ выбиралось достаточно большим, число точек N, в которых сосредоточены носители, определялось условием $2 \leqslant N \leqslant 50$. Для достаточно большого N носители мер $\mu(n)$ "размазываются"даже при незначительном n. При этом произведения $g(n)$ правильно уходят на бесконечность при $n \to \infty$. А это означает, что носители мер $\mu(n)$ таковы, что $\tau_3(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ ($\tau_3(n) \in \operatorname{supp} \mu(n)$) и точки носителей удаляются от границ области $D = \{(\tau_2, \tau_3) : -\tau_3/2 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_3\}$. Если же N небольшое, то эти процессы происходят несколько медленнее, однако характер поведения не меняется.

Анализируя приведенные данные, можно выдвинуть гипотезу о том, что, если носители мер находятся не только в компакте,

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_{M,\alpha} = \{(\tau_2, \tau_3) : 2 \leqslant \tau_3 \leqslant M, \quad |k\tau_2| \leqslant \tau_3,\\ (1 - \sqrt{2.5\alpha})/2 < M^2 k < (1 + \sqrt{2.5\alpha})/2\},\end{aligned}$$

а и в более широкой области, сходимость мер к закону, которому в $\mathbb{R}^2$ соответствует некоторое нормальное распределение, также может иметь место.

Наиболее изученным и доступным является анализ случайных величин, рассматриваемых в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$. Поэтому, меры m_i, соответствующие мерам μ_i, строились именно в метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$.

Соответствие мер m и μ основывалось на равенстве характеристических функций мер. Характеристическая функция меры m при этом являлась преобразованием Фурье плотности распределения $p(y_2, y_3)$ на плоскости, где

$$m(A) = \iint\limits_A p(y_2, y_3)\, dy_2\, dy_3,$$

$$f_m(\chi) = \iint\limits_{R^2} \exp\bigl(i(\chi_2 y_2 + \chi_3 y_3)\bigr) p(y_2, y_3)\, dy_2\, dy_3.$$

Характеристическая функция меры μ определялась с помощью зональной сферической функции

$$f_\mu(\chi) = \int\limits_G \varPhi(\chi, \tau)\, d\mu(\tau).$$

Для анализа мер на плоскости строились графики поверхностей, соответствующих плотностям $p(y_2, y_3)$. Эта функция однозначно определяется по мере μ. Задавались набор точек $t_k = (t_{2k}, t_{3k}), k = 1, 2, \ldots, N$, совокупность которых определяет носитель меры μ, и набор вероятностей p_k:

$$p_k = \mu(\tau_2 = t_{2k}; \tau_3 = t_{3k}), \quad \sum_{k=1}^{N} p_k = 1.$$

Плотность находится из соотношения

$$p(y_2, y_3) = \int\limits_G F_\tau(y_2, y_3)\, d\mu_i = \sum_{k=1}^{N} p_k F_{t_k}(y_2, y_3).$$

Функция $F_{t_k}(y_2, y_3)$ представляется в виде шести слагаемых. Однако, т. к. при $\tau_3 > 2$ все слагаемые, кроме $F_{t_{k,1}}(y_2, y_3)$, где

$$F_{t_{k,1}}(y_2, y_3) = \frac{2}{s(t_k)(2\pi)^2} \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{i(\chi_2[t_{k,2} - y_2] + \chi_3[t_{k,3} - y_3])\} \exp(2t_{k,2} + 4t_{k,3})}{-(\chi_2 - 2i)(\chi_3 - 4i)(2 + i(\chi_3 - \chi_2))}\, d\chi_2\, d\chi_3,$$

несущественны, при построении $p(y_2, y_3)$ имеет смысл рассматривать

лишь слагаемое $F_{t_{k,1}}(y_2, y_3)$. Такой подход позволил построить поверхности $p(y_2, y_3)$.

Для статистического анализа распределений случайного вектора $\xi = (\xi_2, \xi_3)$ с мерой m предлагается следующая схема.

Рассмотрим построенную функцию $p(y_2, y_3)$, однозначно определяемую для меры μ. Носитель распределения с плотностью $p(y_2, y_3)$ есть множество

$$\operatorname{supp}(m) = \{(y_2, y_3) : y_3 \leqslant \max \tau_3,\ (y_2 + y_3) \leqslant \max(\tau_2 + \tau_3); \\ (\tau_2, \tau_3) \in \operatorname{supp}(\mu)\}.$$

(Это множество — тупой угол на плоскости (y_2, y_3).) Покрываем этот угол непересекающимися прямоугольниками B_{ij}, $i = 1, \ldots, i_B, j = 1, \ldots, j_B$, линейные размеры которых невелики, и областями $B_{10} = \{(y_2, y_3) : y_3 \leqslant \gamma_1\}$, $B_{01} = \{(y_2, y_3) : \gamma_1 \leqslant y_3 \leqslant \max \tau_3, y_2 \leqslant \gamma_2\}$. Пусть прямоугольников и областей всего b. Величины γ_1 и γ_2 выбираем так, чтобы область, закрываемая прямоугольниками, покрывала в угле окрестности локальных экстремумов $p(y_2, y_3)$ (точки $\{y_2 = t_{k,2}, y_3 = t_{k,3}\}$) и хребтов $\{\tau_2 + \tau_3 - y_2 - y_3 = 0.25$, если $\tau_2 < y_2\}$, $\{\tau_3 - y_3 = 0.25$, если $\tau_2 > y_2\}$. Зная явный вид функции $p(y_2, y_3)$, находим

$$P(B_{ij}) = P(\xi = (\xi_2, \xi_3) \in B_{ij}) = \iint\limits_{B_{ij}} p(y_2, y_3)\, dy_2\, dy_3,$$
$$i = 0, 1, \ldots, i_B,\ j = 0, 1, \ldots, j_B.$$

Моделируем случайные точки на плоскости так, чтобы число точек ν_{ij}, попадающих в области B_{ij}, было близко к величинам $P(B_{ij})n_T$, где n_T — число всех точек. Величину n_T выберем так, чтобы

$$\max_{i,j} \frac{(P(B_{ij}) \cdot n_T - \nu_{ij})^2}{P(B_{ij}) \cdot n_T} < \varepsilon,$$

где ε — достаточно малое заданное число.

Для проверки гипотезы о том, что полученные данные есть реализации случайной величины $\xi = (\xi_2, \xi_3)$, имеющей меру m_i, применим критерий Пирсона. Рассмотрим покрытие областями B'_{ij}, отличными от B_{ij}, но удовлетворяющими тем же условиям, что и B_{ij}. Найдем теоретические вероятности $P(B'_{ij})$:

$$P(B'_{ij}) = \iint\limits_{B'_{ij}} p(y_2, y_3)\, dy_2\, dy_3.$$

Пусть ν'_{ij} — число элементов выборки, попавших в области B'_{ij}. Вычислим значение

$$\chi^{'2} = \sum_{i,j}^{b} \frac{(P(B'_{ij}) \cdot n_T - \nu'_{ij})^2}{P(B'_{ij}) \cdot n_T}.$$

Используя известную теорему Пирсона, можно предположить: если гипотеза о том, что элементы выборки есть реализации случайной величины с плотностью $p(y_2, y_3)$, верна, то при $n \to \infty$ выборочное распределение величины $\chi^{'2}$ стремится к χ^2-распределению с $b-1$ степенью свободы.

Выберем уровень значимости α, пусть χ^2_α — квантиль χ^2-распределения с $b-1$ степенью свободы. Во всех рассмотренных выборках $\chi^{'2} < \chi^2_\alpha$, что означает совместимость значения $\chi^{'2}$ с нашей гипотезой.

Библиографический список

1. *Коровин Д. И.* Доказательство правильного ухода на бесконечность произведения независимых случайных матриц // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1998. № 2. С. 3—8.
2. *Коровин Д. И.* Достаточные условия стремления к нормальному закону композиции различных слабо симметричных мер // Изв. Петр. акад. наук и искусств. Иваново, 1999. Т. 5, вып. 4. С. 92.
3. *Тутубалин В. Н.* Слабо симметричные меры на группе унимодулярных матриц // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1990. № 2. С. 14—21.
4. *Тутубалин В. Н.* Уход на бесконечность произведения случайных матриц // Там же. № 3. С. 6—13.