Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2001 С. 126 – 128

Ю. И. Масляков

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ КОНЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Получена оценка конечного преобразования Лапласа при некоторых ограничениях на оригинал.

The bound of final Laplace transformation under some restrictions on the original is obtained.

УДК 517.

Во многих вопросах естествознания возникают интегралы, содержащие параметр. Случаи, когда эти интегралы явно вычисляются, крайне редки. Поэтому решающую роль для таких интегралов играют оценки и асимптотические формулы. В работе получена оценка конечного преобразования Лапласа

$$L(z) = \int\limits_0^1 e^{-tz}\varphi(t)\,dt.$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть комплекснозначная функция* $\varphi(t)$ *непрерывна на* $[0;1]$, *а функция* $|\varphi(t)|$ *вогнута на* $(0;1)$. *Тогда функция* $L(z) = \int\limits_0^1 e^{-tz}\varphi(t)\,dt$ *аналитична в* $\mathbb{C}$ *и имеет место оценка*

$$|L(z)| \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x}\left|\varphi\left(\frac{1-e^{-x}(x+1)}{x(1-e^{-x})}\right)\right| \quad (z\in\mathbb{C}), \tag{1}$$

где $x = \operatorname{Re} z$, *и при* $x = 0$ *правую часть неравенства (1) следует понимать как* $\left|\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right|$.

Доказательство. Аналитичность $L(z)$ в $\mathbb{C}$ очевидна [1]. Далее,

$$|L(z)| \leqslant \int\limits_0^1 e^{-tx}|\varphi(t)|\,dt \quad (z\in\mathbb{C}). \tag{2}$$

Оценим сверху $\int\limits_0^1 e^{-tx}|\varphi(t)|\,dt$, считая $x \neq 0$. Так как $|\varphi(t)|$ вогнута на $(0;1)$, то существует функция p, определенная на $\mathbb{R}$, такая, что

$\left|\varphi(t)\right|_{t\in(0;1)} = \inf_{s\in R}[p(s)-st]$ [2]. Отсюда $|\varphi(t)| \leqslant p(s)-st$ $(t\in(0;1);\ s\in\mathbb{R})$. Умножая это неравенство на e^{-tx}, а затем интегрируя, получим

$$\int\limits_0^1 e^{-tx}|\varphi(t)|\,dt \leqslant p(s)\int\limits_0^1 e^{-tx}\,dt - s\int\limits_0^1 te^{-tx}\,dt =$$
$$= \int\limits_0^1 e^{-tx}\,dt\left[p(s) - s\,\frac{\int\limits_0^1 te^{-tx}\,dt}{\int\limits_0^1 e^{-tx}\,dt}\right] \quad (s\in\mathbb{R}).$$

А тогда

$$\int\limits_0^1 e^{-tx}|\varphi(t)|\,dt \leqslant \int\limits_0^1 e^{-tx}\,dt\cdot\inf_{s\in\mathbb{R}}\left[p(s) - s\,\frac{\int\limits_0^1 te^{-tx}\,dt}{\int\limits_0^1 e^{-tx}\,dt}\right] =$$
$$= \int\limits_0^1 e^{-tx}\,dt\cdot\left|\varphi\left(\frac{\int\limits_0^1 te^{-tx}\,dt}{\int\limits_0^1 e^{-tx}\,dt}\right)\right| = \frac{1-e^{-x}}{x}\left|\varphi\left(\frac{1-e^{-x}(x+1)}{x(1-e^{-x})}\right)\right|. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует (1) при $x\neq 0$.

Оценим сверху $\int\limits_0^1 |\varphi(t)|\,dt$.

Будем иметь $\int\limits_0^1 |\varphi(t)|\,dt \leqslant p(s) - s\cdot\frac{1}{2}\quad (s\in\mathbb{R})$.

А тогда

$$\int\limits_0^1 |\varphi(t)|\,dt \leqslant \inf_{s\in\mathbb{R}}\left(p(s) - s\cdot\frac{1}{2}\right) = \left|\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right|. \quad (4)$$

Из (2) и (4) следует (1) при $x=0$. Теорема доказана.

Замечание. *Если в условиях теоремы опустить требование вогнутости функции* $|\varphi(t)|$, *то оценка* (1) *заменится более грубой оценкой*

$$|L(z)| \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)| \quad (z\in\mathbb{C}), \quad (5)$$

где правую часть неравенства (5) *при* $x=0$ *следует понимать как* $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|$.

Библиографический список

1. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., 1991. 447 с.
2. *Зорич В. А.* Математический анализ. М., 1981. Ч. 1. 543 с.