Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2001 С. 128 – 133

М. А. Паринов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛОРЕНЦА

Обобщен метод получения первых интегралов уравнений Лоренца, предложенный автором ранее (1981 г.). Приведено обоснование этого метода в частном случае.

The author's method of the first integrals of the Lorentz equations (1981 y.) is generalized for all dimensions. The ground of this method in particular case is presented.

УДК 514.8+517.958.

Введение

В работе автора [9] предложен метод получения первых интегралов уравнений Лоренца (уравнений движения пробной заряженной частицы в электромагнитном поле при наличии или в отсутствии тяготения), основанный на использовании теоремы Э. Нетер и концепции электромагнитного поля как симплектической структуры. Описание этого метода можно найти также в [11, 12, 14]. В [1, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 13] рассмотрены примеры применения данного метода для ряда классов электромагнитных полей в отсутствии тяготения. Настоящая статья посвящена обоснованию метода для класса дифференциальных уравнений, содержащего систему уравнений Лоренца.

1. Обобщенные уравнения Лоренца

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $\{x^i\}$ — локальные координаты в M, $g = ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ — риманова или псевдориманова метрика на M. Пусть, далее, $A = A_i dx^i$ — дифференциальная 1-форма на M (потенциальная структура), где $A_i = A_i(x)$ — ковекторное поле. Рассмотрим вариационную задачу для функционала

$$J[x] = \int_l (\alpha\, ds + \beta\, A) \quad (\alpha, \beta = \mathrm{const} \in \mathbb{R}), \tag{1}$$

где интегрирование происходит по кривым $l : x^i = x^i(s)$ с фиксированными концами, а s — натуральный параметр.

Отметим, что действие для заряженной частицы в электромагнитном поле при наличии тяготения (или в отсутствии последнего)

$$S[x] = \int (-mc\,ds - \frac{e}{c} A_i\,dx^i) \tag{2}$$

есть частный случай функционала (1), вариационная задача для которого приводит к системе уравнений Лоренца [7]. Поэтому уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала (1) естественно назвать обобщенными уравнениями Лоренца. Вычисления показывают, что они имеют следующий вид:

$$\alpha(\ddot{x}^m + \Gamma^m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) = \beta g^{km} F_{kj}\dot{x}^j, \tag{3}$$

где $F_{kj} = \partial_k A_j - \partial_j A_k$, $\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$, а точкой обозначено дифференцирование по s.

2. Теорема Нетер

Говорят, что система дифференциальных уравнений

$$\Phi_k(s, x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = 0 \quad (k = 1, \ldots, N)$$

допускает первый интеграл (закон сохранения), если существует функция $H(s, x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$, постоянная на решениях: $dH/ds = 0$.

Одним из конструктивных методов получения первых интегралов является теорема Э. Нетер. Приведем формулировку этой теоремы в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, следуя Н. Х. Ибрагимову [3].

Пусть задан функционал

$$F[x] = \int_l L(s, x, \dot{x})\,ds \quad (x = (x^1, \ldots, x^n),\ \dot{x} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)) \tag{4}$$

на множестве кривых $l : x = x(s)$. И пусть на $M \times \mathbb{R}$ действует r-мерная группа диффеоморфизмов G_r

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x, s; a), \quad \tilde{s} = \tilde{s}(x, s; a) \quad (a = (a^1, \ldots, a^r)). \tag{5}$$

Функционал (4) называется инвариантным относительно группы G_r, если для всех функций $x = x(s)$ выполняется равенство

$$\int_l L(s, x, \dot{x})\,ds = \int_{\tilde{l}} L(\tilde{s}, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}})\,ds \tag{6}$$

независимо от выбора линии интегрирования ($\tilde{l}$ — образ кривой l при отображении (5)).

Теорема. *Пусть функционал (4) инвариантен относительно группы G_r (5) с базисными инфинитезимальными операторами 1-мерных под- групп*

$$X_\mu = \xi_\mu(s,x)\frac{\partial}{\partial s} + \eta^i_\mu(s,x)\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\mu = 1,\,\ldots,\,r). \tag{7}$$

Тогда уравнения Эйлера – Лагранжа этого функционала

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{8}$$

имеют r независимых законов сохранения, причем сохраняющиеся величины имеют вид

$$H_\mu = (\eta^i_\mu - \dot{x}^i\xi_\mu)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + L\xi_\mu \quad (\mu = 1,\,\ldots,\,r). \tag{9}$$

Если G_r — группа точечных преобразований (диффеоморфизмов многообразия M) $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x;a)$, то $\xi_\mu = 0$ и $\eta^i_\mu = \eta^i_\mu(x)$, а формула (9) приобретает вид

$$H_\mu = \eta^i_\mu\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \tag{10}$$

3. Метод получения первых интегралов для обобщенных уравнений Лоренца

Если функционал (1) инвариантен относительно группы диффеоморфизмов $G_1 : \tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x;a)$ $(a \in \mathbb{R})$, соответствующей инфинитезимальному оператору $X = \xi^i(x)\partial_i$, то уравнения (3) допускают сохраняющуюся величину согласно (10)

$$H = \xi^i(x)[\alpha g_{ij}(x)\dot{x}^j + \beta A_i(x)]. \tag{11}$$

(Отметим, что лагранжиан, соответствующий функционалу (1), имеет вид $L = \alpha\sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j} + \beta A_i(x)\dot{x}^i$.)

Обозначим через G_g группу движений (множество диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих риманову метрику g), а через G_A — потенциальную группу (множество диффеоморфизмов, сохраняющих потенциальную структуру A). Соответствующие алгебры Ли векторных полей на M обозначим через $\mathcal{L}_g$ и $\mathcal{L}_A$.

Введем в рассмотрение симплектическую структуру

$$F = dA = \sum_{i<j} F_{ij}dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j \quad (F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i). \tag{12}$$

Группу симплектических диффеоморфизмов обозначим через G_F, а соответствующую алгебру Ли векторных полей — через $\mathcal{L}_F$. При условии (12) $G_A \subset G_F$ и $\mathcal{L}_A \subset \mathcal{L}_F$.

Если пересечение групп G_g и G_A нетривиально, то функционал (1) инвариантен относительно $G_g \cap G_A$ и согласно теореме Э. Нетер система уравнений (3) допускает сохраняющиеся величины вида (11). Отметим, что группа $G_g \cap G_A$ вместе с G_g конечномерна.

При калибровочном преобразовании

$$A \mapsto A' = A + df \quad (A'_i = A_i + \partial_i f) \tag{13}$$

(f — скалярная функция на M) уравнение (3) не меняется, но функционал (1) будет инвариантен относительно $G_g \cap G_{A'}$, что может привести к появлению новых сохраняющихся величин. Для $G_{A'}$ справедливо включение $G_{A'} \subset G_F$.

Определим для функционала (1) группу $G_J = G_g \cap G_F$. Все первые интегралы уравнения (3), получаемые с помощью теоремы Нетер, связаны с этой группой. Обозначим $\mathcal{L}_J = \mathcal{L}_g \cap \mathcal{L}_F$. Метод получения первых интегралов обобщенных уравнений Лоренца состоит в выполнении следующих шагов.

1. Нахождение базиса алгебры $\mathcal{L}_J$. Для этого достаточно решить систему уравнений

$$L_\xi g_{ij} \equiv \xi^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i \xi^k + g_{ik} \partial_j \xi^k = 0, \tag{14}$$

$$L_\xi F_{ij} \equiv \xi^k \partial_k F_{ij} + F_{kj} \partial_i \xi^k + F_{ik} \partial_j \xi^k = 0. \tag{15}$$

2. Нахождение для каждого базисного вектора $\xi_\mu \in \mathcal{L}_J$ симметричного ковекторного поля $A_i^{(\mu)}$:

$$L_{\xi_\mu} A_i^{(\mu)} \equiv \xi_\mu^k \partial_k A_i^{(\mu)} + A_k^{(\mu)} \partial_i \xi_\mu^k = 0. \tag{16}$$

Для этого достаточно найти функцию $f^{(\mu)}$, задающую калибровочное преобразование $A_i^{(\mu)} = A_i + \partial_i f^{(\mu)}$ от фиксированного ковекторного поля A_i.

3. Выписывание первых интегралов по формуле (11):

$$H_\mu = \xi_\mu^i \left(\alpha\, g_{ij} \dot{x}^j + \beta\, A_i^{(\mu)}\right). \tag{17}$$

4. Обоснование метода

Пусть потенциальная структура A такова, что симплектическая структура $F = dA$ невырождена: $\det(F_{ij}) \neq 0$. Тогда существует другое представление алгебры $\mathcal{L}_F$ в виде алгебры гамильтоновых функций $\mathcal{F}_F$. Изоморфизм алгебр $\mathcal{L}_F$ и $\mathcal{F}_F$ задается формулой

$$\varphi : \mathcal{L}_F \to \mathcal{F}_F \quad (\xi \mapsto h), \quad \partial_i h = F_{ik} \xi^k \tag{18}$$

(предполагается что $\mathcal{F}_F$ уже факторизована по константам). Для алгебры $\mathcal{F}_A = \varphi(\mathcal{L}_A)$ справедливо отношение [10, с. 39]

$$h \in \mathcal{F}_A \quad \Leftrightarrow \quad h - \Phi^{kl} A_k \partial_l h = 0, \tag{19}$$

где (Φ^{kl}) — матрица, обратная к (F_{ij}).

Пусть $\mathcal{F}_J = \varphi(\mathcal{L}_J)$. Каждому базису $\{\xi_\mu\}$ алгебры $\mathcal{L}_J$ однозначно соответствует базис $\{h^{(\mu)}\}$ в $\mathcal{F}_J$. Если $f^{(\mu)}$ задает калибровочное преобразование $A_i^{(\mu)} = A_i + \partial_i f^{(\mu)}$ от A_i к симметричному полю $A_i^{(\mu)}$, то $h^{(\mu)} \in \mathcal{F}_{A'}$, а значит, выполняется условие

$$h^{(\mu)} - \Phi^{kl} A_k \partial_l h^{(\mu)} - \Phi^{kl} \partial_k f^{(\mu)} \partial_l h^{(\mu)} = 0. \tag{20}$$

Последнее уравнение переписывается в виде

$$\xi_\mu^k \partial_k f^{(\mu)} = H^{(\mu)}(x), \tag{21}$$

где $\xi_\mu^k = \Phi^{kl}\partial_l h^{(\mu)}$ и $H^{(\mu)}(x) = h^{(\mu)} - \Phi^{kl} A_k \partial_l h^{(\mu)}$. Уравнение (21) имеет решение относительно $f^{(\mu)}$ в окрестности любой точки $x \in M$, в которой поле ξ_μ^k не обращается в нуль [6, с. 78].

Таким образом, установлено, что *для каждого базисного вектора* ξ_μ^k *алгебры* $\mathcal{L}_J$ *существует калибровочная функция* $f^{(\mu)}$, *задающая симметричное ковекторное поле* $A_i^{(\mu)}$, *а значит, и первый интеграл по формуле (17).*

Вопрос о продолжимости функции $f^{(\mu)}$ на все многообразие остается открытым. В аналитическом случае множество $N \subset M$, где поле ξ_μ^k обращается в нуль, не содержит внутренних точек, поэтому существование калибровочной функции можно гарантировать в $M \setminus N$, т. е. почти всюду на M. Также остается открытым вопрос о существовании калибровочной функции в случае $\det(F_{ij}) = 0$.

Библиографический список

1. *Авилова А. А., Воробьев А. И.* Первые интегралы уравнений Лоренца для четырех классов электромагнитных полей, допускающих гиперболические винты // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 4 (2001). С. 3—10.
2. *Бурданов Я. В., Васюков А. В., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей. Иваново, 1993. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 03.11.93, № 2736-В93.
3. *Ибрагимов Н. Х.* Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. Новосибирск, 1972. 128 с.
4. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца в случае плоской монохроматической волны // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 1 (1997). С. 36—38.
5. *Иванова А. С., Парфентьева А. Е., Хвойницкая С. В.* Первые интегралы уравнений Лоренца для трех классов электромагнитных волн // Там же. Вып. 3 (2000) С. 27—35.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964. 830 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М., 1967. 460 с.
8. *Параскевов Р. А., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов магнитостатических полей // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 4 (2001). С. 93—102.

9. *Паринов М. А.* Симплектическая группа электромагнитного поля и первые интегралы уравнений движения Лоренца. Иваново, 1981. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 22.02.82, № 802-82.
10. *Паринов М. А.* Введение в симплектическую геометрию: Учеб. пособие. Иваново, 1994. 60 с.
11. *Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца: (Сводка результатов) // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 1 (1997). С. 101—110.
12. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца // Вестн. ИвГУ. Сер. “Биология. Химия. Физика. Математика”. 2000. Вып. 3. С. 140—148.
13. *Ivanova A. S.* The first integrals of the Lorentz equations for three classes of the electromagnetic waves // International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, Susdal, Aug. 21 – 26, 2000: Abstracts. Vladimir, 2000. P. 44—46.
14. *Parinov M. A.* One method of obtaining the first integrals of the Lorentz equations // Ibid. P. 64—66.