Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2002 С. 94 – 109

Е. П. Барановский

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ И ДИАГОНАЛЬНЫХ СИМПЛЕКСАХ КОМПЛЕКСОВ ПЕРЕДЕЛИВАНИЯ В РЕШЕТКАХ

Предложено описание строения комплексов переделивания в решетках n-мерных евклидовых пространств на основе понятий характеристики комплекса и его диагональных симплексов. Исходя из характеристик,дано описание комплексов переделивания в решетках размерности $n \leqslant 6$.

The repartitioning complex in L-decompositions of lattices corresponds to transformation from one primitive L-type to another. In this paper the structure of the repartitioning complexes is obtained on the base on characteristics of complexes and their diagonal simplexes.

УДК 514.17.

§ 1. Введение

Г. Ф. Вороной при исследовании структуры L-разбиений n-мерных решеток доказал [4, § 88 – 90], что L-разбиение решетки общего типа можно рассматривать как состоящее из тел K — выпуклых многогранников с $n+2$ вершинами, образованными из нескольких L-симплексов. Эти многогранники обладают следующими особенностями: 1) составляющие их симплексы смежны попарно гранями $n-1$ измерения, 2) при переходе из области одного общего L-типа к другому общему L-типу многогранники K сохраняются в том смысле, что они переходят в аналогичные многогранники в L-разбиении другого типа — каждый в каждый, но только один или несколько из них оказываются в новой области разбитыми на L-симплексы другим способом по сравнению с разбиением в исходной области, причём для данного тела K таких способов имеется только два.

Геометрическое описание переделивания — перехода от одного общего L-типа к другому — было предложено С. С. Рышковым (см., напр., [5]). Теория переделивания рассмотрена в статье [6].

Краткое геометрическое описание того, что принято называть переделиванием, следующее. В пространстве R^N, $N = \frac{n(n+1)}{2}$, параметров n-мерных решеток переход от данной области (L_0) общего L-типа к смежной с ней по $(N-1)$-мерной грани области (L_1) соседнего с ней L-типа заключается в том, что одно из тел K, состоящее из совокупности L-симплексов решеток области (L_0), на границе перехода превращается в

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00010).

L-многогранник $[K]$ с $n+2$ вершинами (многогранник переделивания), который затем, при сдвиге с границы областей в область (L_1), снова распадается на L-симплексы, но уже решеток L-типа области (L_1). Однако симплициальная структура полученного из многогранника $[K]$ тела этой области отлична от аналогичной структуры в области (L_0).

Разбиения многогранника $[K]$ при таких малых деформациях содержащей его решетки, когда он перестает быть L-многогранником и распадается на симплексы, называют *переделиваниями.* Многогранник $[K]$ вместе с его переделиваниями (мы будем пользоваться для их обозначения буквами K_1 и K_2) получил название *комплекса переделивания.*

В этой статье на основе понятия *характеристики комплекса переделивания*, введенного в работе [3], построено описание многогранника переделивания и способов его разбиения на симплексы. Геометрический смысл характеристики — отношение между объемами симплексов, из которых состоит комплекс переделивания. Исходя из понятий характеристики и диагональных симплексов комплекса переделивания, приведен вывод этих комплексов при $n \leqslant 5$. На основе рассмотрения в решетках многогранника переделивания и соответствующего ему комплекса переделивания предложен способ вывода таких комплексов на базе знания так называемых L-условий для решеток данной размерности. Этим способом получены комплексы n-мерных решеток при $n = 6$, дано их подробное описание.

§ 2. Две леммы из теории барицентрических координат

Пусть $S = \{A_0 A_1 \dots A_n\}$ — базисный симплекс барицентрической системы координат $(x^0, x^1, \dots, x^n)$, $\sum_{i=0}^n x^i = 1$ в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Гиперплоскости этого пространства, определяемые фасетами (гипергранями) базисного симплекса S, будем называть *координатными плоскостями.* Уравнения координатных и им параллельных гиперплоскостей мы будем рассматривать в виде $x^p = 0$ и $x^p = \mathrm{const}$.

Рассмотрим точку M с координатами

$$(m^0, m^1, \dots, m^n). \tag{1}$$

Лемма 1. *Точка M с координатами (1) есть результат пересечения $n+1$ гиперплоскостей, параллельных координатным; их уравнения:*

$$x^0 = m^0, x^1 = m^1, \dots, x^n = m^n.$$

Точка M расположена от гиперплоскости $x^p = 0$ по одну сторону с симплексом S или по разные в зависимости от того, положительна или отрицательна координата $x^p = m^p$, $p \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Утверждения леммы вытекают непосредственно из определения барицентрических координат.

Лемма 2. *Отношение объемов симплекса S и симплекса $S_p(M)$, полученного из симплекса S заменой вершины A_p вершиной M, равно $1 : |m^p|$.*

▷ У симплексов S и $S_p(M)$ общая гипергрань

$$\sigma(p) = \{A_0 \ldots A_{p-1} A_{p+1} \ldots A_n\}.$$

Гиперплоскости, параллельные этой гиперграни, имеют уравнения вида $x^p = \text{const}$. Гиперплоскость G_0, на которой лежит гипергрань $\sigma(p)$, имеет уравнение $x^p = 0$, а вершины A_p и M расположены соответственно на гиперплоскостях G_1 и G_2: $x^p = 1$ и $x^p = m^p$. Из того, что расстояния между соседними гиперплоскостями, параллельными какой-либо координатной гиперплоскости, одинаковы, вытекает, что отношение расстояний между гиперплоскостью G_0 и соответственно гиперплоскостями G_1 и G_2 равно $1 : |m^p|$. Дальнейшее очевидно. •

§ 3. Многогранник переделивания: характеристика, строение, разбиение на симплексы

Многогранником переделивания будем называть n-мерный выпуклый многогранник пространства E^n, имеющий $n+2$ вершины.

Так как многогранник переделивания выпуклый и n-мерный, то, следовательно, среди его вершин найдется множество из $n+1$ линейно независимых точек.

Пусть $\Pi = \{A_0 A_1 \ldots A_{n+1}\}$ — многогранник переделивания. Через S^i будем обозначать многогранник с вершинами в вершинах многогранника Π, из которых исключена точка A_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$, а через $\sigma(i, j)$ — аналогичный многогранник, в котором исключены две точки: точка A_i и точка A_j. В случае, когда все многогранники S^i являются симплексами, то есть любые $n+1$ вершины многогранника Π линейно независимы, мы будем называть многогранник Π *многогранником переделивания общего вида,* в противном случае — *специального.*

Считаем употребляемые в качестве индексов буквы k и l пробегающими значения $0, 1, \ldots, n$ или принимающими одно из этих значений; аналогично буквам i и j будут соответствовать значения $0, 1, \ldots, n+1$. Впрочем, часто мы будем явно оговаривать перечень принимаемых значений.

Пусть $\bar{a}_i$, где $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$, — радиус-вектор вершины A_i многогранника Π относительно произвольно выбранного начала O.

Лемма 3. *Для системы точек $\{A_i\}$ существуют единственные с точностью до ненулевого множителя коэффициенты λ^i, среди которых есть отличные от 0, такие, что*

$$\sum_i \lambda^i = 0, \qquad \sum_i \lambda^i \bar{a}_i = \bar{0}. \tag{2}$$

▷ Существование коэффициентов следует из линейной зависимости системы.

Докажем их единственность с точностью до ненулевого множителя. Пусть система точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$ линейно независима и, следовательно, коэффициент $\lambda^{n+1} \neq 0$. Из соотношения (2) получаем

$$\bar{a}_{n+1} = -\frac{1}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \bar{a}_k, \tag{3}$$

причем сумма коэффициентов $-\dfrac{\lambda^k}{\lambda^{n+1}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, равна 1. Следовательно, соотношение (3) представляет собой барицентрическое разложение для радиуса-вектора $\bar{a}_{n+1}$, то есть в правой его части приведены барицентрические координаты точки A_{n+1} относительно симплекса S^{n+1}. Из единственности барицентрического разложения следует единственность с точностью до множителя коэффициентов в (2). •

Строку коэффициентов $(\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{n+1})$ из разложения (2) будем называть *характеристикой* многогранника переделивания Π.

Лемма 4. *В характеристике многогранника* Π *не может быть отрицательным (положительным) только один коэффициент.*

▷ Если отрицателен (положителен) только один коэффициент, скажем λ^{n+1}, то вершина A_{n+1} многогранника Π оказывается расположенной внутри симплекса S^{n+1}. Действительно, согласно (3) все барицентрические координаты точки A_{n+1} относительно симплекса S^{n+1} оказываются положительными, что означает принадлежность точки A_{n+1} внутренности симплекса S^{n+1}. •

Теорема 1. *Многогранник* $S^i = \{A_0 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_{n+1}\}$ *является* n*-мерным симплексом тогда и только тогда, когда в характеристике многогранника* Π *коэффициент* $\lambda^i \neq 0$.

▷ Из равенства $\lambda^i = 0$ вытекает линейная зависимость вершин многогранника S^i, следовательно, он не является n-мерным симплексом.

Пусть $\lambda^i \neq 0$, и предположим, что вершины многогранника S^i линейно зависимы. Тогда существует такой ненулевой набор чисел $\mu^0, \dots, \mu^{i-1}, \mu^{i+1}, \dots, \mu^n$, что

$$\sum_{t \neq i} \mu^t = 0, \qquad \sum_{t \neq i} \mu^t \bar{a}_t = \bar{0}. \tag{4}$$

Сложив вторые равенства из (4) и (2), получим разложение вида (2), не эквивалентное исходному, то есть не получающееся из него умножением на $r \neq 0$, что противоречит лемме 3.•

Следствие 1. *Многогранник переделивания тогда и только тогда является многогранником общего вида, когда в его характеристике нет равных 0 коэффициентов.*

Следствие 2. *Если* S^i *симплекс, то барицентрические координаты точки* A_i *относительно него имеют вид:* $-\dfrac{\lambda^q}{\lambda^i}$, $q = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

Лемма 5. *Пусть вершины многогранника* Π *без точек* A_i *и* A_j *определяют* $(n-1)$*-мерную плоскость, то есть многогранник* $\sigma(i, j)$ *— симплекс. Тогда точки* A_i *и* A_j *лежат по одну сторону (по разные стороны) этой плоскости, если в характеристике многогранника коэффициенты* λ^i *и* λ^j *разных знаков (одного знака).*

▷ Следует из леммы 1, теоремы 1 и следствия 2 теоремы 1. •

Лемма 6. *Пусть в характеристике многогранника* Π *коэффициенты* λ^q *и* λ^r *не равны 0. Тогда для объемов* $V(S^q)$ *и* $V(S^r)$ *справедливо отношение*

$$V(S^q) : V(S^r) = |\lambda^q| : |\lambda^r|. \tag{5}$$

$\triangleright$ Следует непосредственно из леммы 2.$\bullet$

Приводим также независимое от этой леммы доказательство. Имеем:

$$V(\Pi) = \Big|\frac{V(S^q)}{\lambda^q}(\lambda^0 + \cdots + \lambda^t)\Big| = \Big|\frac{V(S^q)}{\lambda^g}(\lambda^{t+1} + \cdots + \lambda^p)\Big|,$$

где $V(\Pi)$ — объем многогранника Π, а $(\lambda^0, \ldots, \lambda^t)$ и $(\lambda^{t+1}, \ldots, \lambda^p)$ — множества из коэффициентов одного и того же знака. Составив аналогичное равенство относительно симплекса S^r, получим формулу (5).

Теорема 2. *Поверхность многогранника* Π *образована* $(n-1)$*-мерными симплексами* $\sigma(q, r)$*, где пара* (q, r) *пробегает множество всех таких значений, что* $\lambda^q \neq 0, \lambda^r \neq 0$ *и* λ^q, λ^r *разных знаков.*

$\triangleright$ Следует из теоремы 1 и леммы 5.$\bullet$

Рассмотрим вопрос о том, как и сколькими способами многогранник Π можно разбить на n-мерные симплексы с вершинами в его вершинах.

Теорема 3. *Многогранник переделивания* $\Pi \subset E^n$ *можно разбить на* n*-мерные симплексы с вершинами в его вершинах двумя и только двумя способами: при одном разбиении симплексам разбиения соответствуют положительные коэффициенты характеристики, при другом — отрицательные.*

$\triangleright$ Рассмотрим случай многогранника общего вида. Пусть в его характеристике коэффициенты $\lambda^0, \ldots, \lambda^p$, $p < n$, положительны, остальные — отрицательны. Согласно лемме 3 любые два симплекса S^q и S^r, такие, что $q > p$, $r > p$ или $q \leqslant p$, $r \leqslant p$, смежны по грани $\sigma(q, r)$ и лежат по разные стороны от плоскости этой грани. Следовательно, симплексы внутри каждого из рассматриваемых двух множеств попарно не пересекаются по внутренним точкам, зато пересечение симплексов из разных множеств содержит внутренние точки каждого.

Рассмотрев произвольно взятый симплекс одного из названных в теореме двух множеств, убеждаемся, что по всем не являющимся внешними (см. теорему 2) гиперграням он смежен с симплексами из того же множества. Таким образом, каждое из этих множеств образует покрытие многогранника Π. Поскольку при этом симплексы из одного и того же множества не имеют общих внутренних точек, каждое из этих множеств образует разбиение многогранника Π.

Никаких других симплициальных разбиений многогранника Π не существует, поскольку рассмотрено все множество симплексов, которые можно построить по $n + 2$ точкам как вершинам.

Пусть многогранник переделивания специального вида и в его характеристике m коэффициентов равны 0. В этом случае он представляет собой m-пирамиду над $(n - m)$-мерным многогранником переделивания

Π^*. Следовательно, с учетом доказанного для многогранника Π^*, имеем два разбиения на симплексы, которые представляют собой m-пирамиды над $(n-m)$-мерными симплексами, образованными двумя разбиениями многогранника Π^*. $\bullet$

Из леммы 6 вытекает геометрическая интерпретация характеристики n-мерного многогранника переделивания, которую мы запишем в форме $(u^0, u^1, \ldots, u^p, -v^{p+1}, \ldots, -v^n, -v^{n+1})$, где через $v^{p+1}, \ldots, v^{n+1}$ обозначены модули отрицательных элементов характеристики. Таким образом, имеем:

$$\sum_{t=0}^{p} u^t = \sum_{r=p+1}^{n+1} v^r. \tag{6}$$

Тогда *отношения объемов симплексов, на которые разбивается многогранник переделивания, в одном и другом случаях равны отношениям элементов характеристики соответственно первой и второй сумм (6).*

Разбиения многогранника Π на симплексы будем называть *переделиваниями.* Переделивания можно охарактеризовать множествами, представляющими собой пересечения всех входящих в каждое из двух переделиваний симплексов. Если многогранник общего вида и первые $p+1$ коэффициенты в его характеристике отрицательны, эти пересечения представляют собой, как следует из теоремы 3, p-мерный и $(n-p)$-мерный симплексы:

$$\sigma_1 = \bigcap(S^0, S^1, \ldots, S^p) = \{A_{p+1} \ldots A_{n+1}\},$$
$$\sigma_2 = \bigcap(S^{p+1}, \ldots, S^{n+1}) = \{A_0 A_1 \ldots A_p\}.$$

Таким образом, имеем: $\Pi = \operatorname{conv}(\sigma_1, \sigma_2)$. Симплексы σ_1 и σ_2 будем называть *диагональными симплексами многогранника переделивания* и просто *диагональными симплексами.*

Лемма 7. *Точки диагональных симплексов σ_1 и σ_2, принадлежащие их относительным внутренностям, являются внутренними точками многогранника переделивания* Π.

$\triangleright$ Ни один из названных симплексов, согласно теореме 2, не входит всеми своими вершинами ни в один из $(n-1)$-мерных симплексов $\sigma(q,r)$, образующих поверхность многогранника Π. Действительно, множество вершин симплексов вида $\sigma(q,r)$, расположенных на поверхности многогранника переделивания, не содержат полных множеств вершин ни одного из симплексов σ_1, σ_2. На поверхности расположены только грани всех размерностей того и другого симплекса.

Так как многогранник Π выпуклый, то диагональные симплексы полностью принадлежат ему и, следовательно, их относительные внутренности принадлежат внутренности Π. $\bullet$

Лемма 8. *Пересечение диагональных симплексов $\sigma_1 \cap \sigma_2$ состоит из одной точки, внутренней для каждого из симплексов и внутренней для многогранника переделивания.*

$\triangleright$ Задаваемые диагональными симплексами p-мерная и $(n-p)$-мерная плоскости или не пересекаются, или пересекаются в единственной точке, поскольку “натянутое”на них пространство должно быть n-мерным. Первое исключено, поскольку симплексы σ_1 и σ_2 оказались бы тогда на поверхности многогранника переделивания.

Предположим, что пересечение $\sigma_1 \cap \sigma_2$ пусто или является граничной точкой одного из диагональных симплексов. Тогда существует гиперплоскость T, отделяющая внутренние точки одного симплекса от внутренних точек второго. Но в этом случае оба или один диагональный симплекс окажется на поверхности многогранника переделивания. Это противоречит лемме 7 и доказывает то, что точка перечения диагональных симплексов является внутренней для обоих симплексов.•

Пусть O — точка пересечения диагональных симплексов многогранника переделивания. Соединим точку O отрезками с вершинами симплекса σ_1 и симплекса σ_2 и рассмотрим соответствующие разбиения этих симплексов на “мелкие”симплексы размерностей p и $n-p$:

$$\sigma_{1,0}, \ldots, \sigma_{1,p}, \sigma_{2,p+1}, \ldots, \sigma_{2,n+1}.$$

Непосредственно из леммы 6 вытекает

Лемма 9. *Отношение объемов симплексов, на которые разбился диагональный симплекс σ_1, равно отношению $u^0 : u^1 : \cdots : u^p$, а отношение объемов симплексов, на которые разбился диагональный симплекс σ_2 — отношению $v^{p+1} : v^{p+2} : \cdots : v^{n+1}$.*

§ 4. Многогранники переделивания и соответствующие им комплексы переделивания в решетках

Рассмотрим многогранник переделивания $\Pi \subset E^n$ как многогранник с вершинами в точках некоторой n-мерной равномерно-дискретной системы T. Пусть в характеристике этого многогранника коэффициент $\lambda^{n+1} \neq 0$ и, следовательно, многогранник S^{n+1} является n-мерным симплексом. Введем в рассссмотрение построенную на базе симплекса S^{n+1} функцию $\Phi(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ — степень точки относительно сферы, описанной вокруг симплекса S^{n+1} (см., напр., [1]). Имеет место

Теорема 4. *Пусть (r, R)-система T такова, что*

$$\Phi(X) > 0, \quad \Phi(X) > \Phi(A_{n+1}),$$

где X пробегает все множество точек системы T, кроме вершин многогранника Π. Тогда при $\Phi(A_{n+1}) > 0$ ($\Phi(A_{n+1}) < 0$) L-симплексами системы T являются симплексы того симплициального разбиения многогранника Π, которое соответствует коэффициентам характеристики, знаки которых совпадают со знаком (отличны от знака) коэффициента λ^{n+1}.

▷ В первом случае согласно теореме 3 симплекс S^{n+1} является L-симплексом, следовательно, вместе с ним L-симплексами являются и все те симплексы многогранника Π, которым соответствуют коэффициенты характеристики с тем же знаком, что и у коэффициента λ^{n+1}. Во втором случае имеет место второе симплициальное разбиение.•

Пусть характеристика многогранника переделивания П удовлетворяет условиям

$$\lambda^0 \geqslant \lambda^1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda^p > 0,$$
$$0 > \lambda^{n+1} \geqslant \lambda^{p+1} \geqslant \lambda^{p+2} \geqslant \cdots \geqslant \lambda^{n-1} \geqslant \lambda^n, \quad \sum_{l=0}^{n+1} \lambda^l = 0. \tag{7}$$

Будем считать все элементы характеристики рациональными числами, и пусть для них наименьший общий знаменатель равен Q. Умножив все элементы характеристики на Q, получим целочисленную запись характеристики

$$(u^0, u^1, \ldots, u^p, -v^{p+1}, -v^{p+2}, \ldots, -v^n, -v^{n+1}), \tag{8}$$

где $u^0 \geqslant u^1 \geqslant \cdots \geqslant u^p > 0$ и $v^n \geqslant v^{n-1} \geqslant \cdots \geqslant v^{p+1} \geqslant v^{n+1} > 0$. Потребуем, чтобы

$$v^{n+1} \leqslant u^p. \tag{9}$$

Запись характеристики в форме (8) с выполнением условия (9) назовем ее *стандартной формой.* Очевидно, всякую характеристику с рациональными элементами можно путем перенумерации вершин многогранника П и умножения на подходящий множитель привести к стандартной форме.

Многогранник переделивания будем называть *решеточным многогранником*, если решетка, построенная на некотором его симплексе S^k, содержит в качестве своей точки и вершину многогранника A_k.

Предложение 1. *Многогранник* П *тогда и только тогда является многогранником n-мерной решетки, когда при стандартной записи его характеристики элемент v^{n+1} равен 1.*

▷ Симплекс S^{n+1} возьмем в качестве основного симплекса n-мерной решетки $\Gamma^n(S^{n+1})$. Согласно определению характеристики имеем

$$\sum_{j=0}^{p} u^j\, \overline{OA_j} - \sum_{k=p+1}^{n} v^k\, \overline{OA_k} = \overline{OA_{n+1}}, \tag{10}$$

где O — произвольно выбранная точка. Так как $\sum_{j=0}^{p} u^j - \sum_{k=p+1}^{n} v^k = 1$, то строку (10) можно рассматривать как барицентрическое разложение для точки A_{n+1}. Поскольку оно целочисленно, то многогранник П принадлежит решетке с основным симлексом S^{n+1}. •

Из теории L-разбиений, задаваемых решетками, вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Если многогранник переделивания является L-многогранником решетки, то существуют такие достаточно малые деформации решетки, после которых многогранник* П *распадается на L-симплексы тем или другим из двух возможных способов.*

Если многогранник П *является единственным отличным от симплекса среди попарно негомологичных L-многогранников решетки, то существует достаточно малая деформация решетки, после которой в ее L-разбиении, кроме разбиения многогранника* П *на симплексы, никаких комбинаторных перестроений не происходит.*

Из теоремы 5 следует, что решетки, содержащие в своих L-разбиениях многогранники переделивания, являются переходными от одного типа L-разбиения к другому. В частности, многогранник переделивания вместе с порождаемыми им двумя разбиениями на симплексы характеризует переход от одного общего L-типа к другому. Рассматриваемый в такой ситуации — перехода от одного типа L-разбиения к другому — многогранник П вместе со своими разбиениями на симплексы получил название *комплекса переделивания.* Характеристику многогранника переделивания мы будем называть и характеристикой соответствующего многограннику комплекса переделивания.

Всюду ниже, имея в виду комплекс переделивания только в решетках, мы будем рассматривать его как совокупность L-многогранника $[K]$ некоторой решетки и двух его переделиваний K_1 и K_2 — двух его вариантов распадения на L-симплексы, соответствующих диагональным симплексам σ_1 и σ_2.

Исходя из теоремы 5 и леммы 6, получаем следующую очевидную лемму:

Лемма 10. *Если в симплициальных разбиениях многогранника $[K]$ содержатся основные симплексы решетки, то в его характеристике, записанной в стандартном виде, им соответствуют коэффициенты, по абсолютной величине равные 1.*

Обратное, вообще говоря, неверно: коэффициенту, по модулю равному 1, хотя и соответствует симплекс минимального объема на множестве всех симплексов симплициальных разбиений многогранника, однако его объем может быть в некоторое целое число раз больше объема основного симплекса решетки.

Опираясь на лемму 6 и на следующие известные факты [1] :

1) при $n < 5$ все L-симплексы основные,
2) при $n = 5$ существуют, кроме основных, симплексы удвоенного объема, причем если последние присутствуют в L-разбиении решетки, то все они попарно гомологичны,

имеем теорему:

Теорема 6. *При $n \leqslant 5$ все множество комплексов переделивания исчерпывается комплексами со следующими характеристиками:*

$$n = 2 \quad - \quad (-1,-1,1,1), \tag{11}$$

$$n = 3 \quad - \quad (-1,-1,1,1,0), \tag{12}$$

$$n = 4 \quad - \quad (-1,-1,1,1,0,0),\ (-1,-1,-1,1,1,1), \tag{13}$$

$$\begin{gathered} n = 5 \quad - \quad (-1,-1,1,1,0,0,0),\ (-1,-1,-1,1,1,1,0), \\ (-2,-1,-1,1,1,1,1). \end{gathered} \tag{14}$$

$\triangleright$ В размерностях $n = 2, 3, 4$ характеристика комплекса может содержать только нули и единицы с тем или иным знаком; все возможные комбинации таких характеристик ограничиваются строками (11) – (13).

При $n = 5$ в строке характеристики, не содержащей нулей, может присутствовать двойка, причем согласно 2) только одна. Перебрав все возможности и отбросив строку $(-1,-1,-1,-1,1,1,2)$, эквивалентную строке $(-2,-1,-1,1,1,1,1)$, получаем (14).

Тем самым доказано только априорное существование комплексов переделивания с характеристиками (11) – (14). Доказательство их фактического существования определяется тем, что известны решетки, в которых переделивание происходит по этим комплексам.●

§ 5. Комплексы переделивания и L-условия для симплексов решетки

Пусть $S(n)$ — некоторый n-мерный симплекс с вершинами в точках решётки Γ^n. Необходимые и достаточные условия того, что этот симплекс является симплексом L-разбиения решетки, называются *L-условиями для симплекса $S(n)$*. Всюду ниже, говоря об L-условиях, мы будем предполагать, что они определены перечнем конечного числа точек решетки и представляют собой требование, чтобы ни одна из этих точек не принадлежала замкнутому шару $\Omega(S(n))$, описанному вокруг симплекса $S(n)$. Если

$$M_1, M_2, \ldots, M_d \tag{15}$$

— множество точек, определяющих L-условия, то условия того, что эти точки не принадлежат шару $\Omega(S(n))$, заключаются в выполнении d неравенств

$$\Phi(M_1) > 0, \Phi(M_2) > 0, \ldots, \Phi(M_d) > 0, \tag{16}$$

где $\Phi(X)$ — построенная на базе симплекса $S(n)$ функция Φ точки X.

Если точки множества (15) таковы, что для любой из них существуют содержащие симплекс $S(n)$ решетки, на которых выполнены все неравенства списка (16), кроме неравенства, соответствующего выделенной точке, причем для последней оно превратилось в равенство, то L-условия будем называть *минимальными*. Таким образом, минимальные L-условия таковы, что любая из точек определяющего множества (15) вместе с вершинами симплекса $S(n)$ задает многогранник переделивания некоторой решетки.

Теорема 7. *Пусть при некоторой размерности n на множестве решеток задан полный список L-условий и все условия этого списка минимальны. Тогда все комплексы переделивания на множестве решеток данной размерности определяются названными L-условиями.*

▷ Каждой строке из списка минимальных L-условий соответствует некоторый комплекс переделивания. Выбрав из них те, характеристики которых попарно различны (при стандартной записи), получим полный список комплексов переделивания при данном n. ●

Воспользовавшись списком L-условий из статьи [2], из теоремы 7 получим

Следствие. *При $n = 6$ имеется всего шесть различных комплексов переделивания; они заданы характеристиками:*

$$\begin{gathered}(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1), \quad (2,1,1,1,-1,-1,-1,-2),\\ (3,1,1,1,-1,-1,-2,-2), \quad (1,1,1,1,1,-1,-2,-2),\\ (1,1,1,1,1,-1,-1,-3), \quad (2,1,1,1,1,-1,-2,-3).\end{gathered} \tag{17}$$

Первые три в качестве диагональных симплексов имеют 3-мерные симплексы, остальные — треугольник и 4-симплекс.

§ 6. О многогранниках переделивания в n-мерных решетках при $n = 2, 3, 4, 5$

В этом параграфе дан вывод многогранников переделивания в решетках размерностей $n = 2, 3, 4, 5$, исходя из факта, что они могут иметь характеристики только (11) – (14), и никаких других.

Обозначим через B_i симплекс S^i из многогранника переделивания П, рассматриваемый как барицентрический базис; координаты относительно этого базиса будем заключать в квадратные скобки. Характеристику многогранников переделивания в этом параграфе (и только в этом) будем записывать в форме $(-v^0, \dots, -v^p, v^{p+1}, \dots, v^{n+1})$, где все числа v_0, … , v^{n+1} неотрицательны. Через G обозначим точку пересечения диагональных элементов.

Лемма 11. *Чтобы вершины многогранника переделивания лежали на сферической поверхности, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$-\sum_{t=0}^{n+1} v^t d_t^2 + \sum_{u=p+1}^{n+1} v^u d_u^2 = 0,$$

где d_i, $i = 0, 1, \dots, n+1$, — радиусы-векторы вершин многогранника относительно произвольного начала.

Доказательство леммы можно найти, например, в [3].

$\boldsymbol{n = 2}$. Диагональные элементы — два отрезка, пересечение которых — внутренняя точка каждого из отрезков; характеристика многоугольника имеет вид $(-v^0, -v^1, v^2, v^3)$, где все v^i, $i = 0, 1, 2, 3$, положительны и $\sum_{i=0}^{3} v^i = 0$.

Барицентрические координаты точки A_0 относительно треугольника S^0 имеют вид: $\left[\dfrac{-v^1}{v^0}, \dfrac{v^2}{v^0}, \dfrac{v^3}{v^0}\right]$.

Найдем координаты точки G, в которой отрезки пересекаются. Относительно базиса B_0 (координатные строки считаем имеющими вид $[x^1, x^2, x^3]$) эта точка лежит на пересечении прямых $x^1 = 0$, $v^3x^2 - v^2x^3 = 0$, откуда находим координатную строку точки G:

$$\left[0, \frac{v^2}{v^0 + v^1}, \frac{v^3}{v^0 + v^1}\right]. \tag{18}$$

Относительно базиса B_3 или B_2 эта строка имеет вид

$$\left[\frac{v^0}{v^2 + v^3}, \frac{v^1}{v^2 + v^3}, 0\right]. \tag{19}$$

Потребуем, чтобы каждый из треугольников B_i в решетке был основным. Очевидно, необходимым и достаточным условием этого является равенство $v^i = 1$ при всех $i = 0, 1, 2, 3$.

Тем самым имеем характеристику $(-1, -1, 1, 1)$ и координаты точки G — $[0, 1/2, 1/2]$ или $[1/2, 1/2, 0]$ относительно реперов B_0, B_1 или B_2, B_3 соответственно. Многоугольник переделивания — параллелограм.

Обратимся к лемме 11. Помещаем начало в точку A_1. Аффинные координаты точки A_0: $(1, 1)$, и $f(1, 1) = a_{11} + 2a_{12} + a_{22}$. Согласно лемме 11 получаем уравнение: $-f(1, 1) - 0 + a_{11} + a_{22} = 0$. Из уравнения вытекает, что $a_{12} = 0$, то есть что многоугольник переделивания тогда и только тогда является L-многоугольником, когда он прямоугольник.

$\boldsymbol{n = 3}$. Диагональные элементы — отрезок и треугольник, их пересечение — внутренняя точка каждого. Следовательно, характеристика имеет вид

$$(-v^0, -v^1, v^2, v^3, v^4). \tag{20}$$

Координаты вершины A_0 относительно базиса B_0 следующие:

$$\left[-\frac{v^1}{v^0}, \frac{v^2}{v^0}, \frac{v^3}{v^0}, \frac{v^4}{v^0}\right]. \tag{21}$$

Точка G лежит на пересечении плоскости $x^1 = 0$ (базис B_0, координатная строка $[x^1, x^2, x^3, x^4]$) и прямой A_0A_1: $x^1 = -\frac{v^1}{v^0} + t(1 + \frac{v^1}{v^0})$, $x^q = \frac{v^q}{v^0} + t(0 - \frac{v^q}{v^0})$, $q = 2, 3, 4$. Находим координаты точки G:

$$x^1 = 0, \quad x^q = \frac{v^q}{v^0 + v^1}, \quad q = 2, 3, 4.$$

Так как $n = 3$ — нечетное число, то требование, чтобы каждый симплекс B_i в многограннике переделивания был основным, не может быть выполнено. Поскольку в 3-мерных решетках при распадении многогранника переделивания должны получаться основные L-симплексы, делаем вывод, что при $n = 3$ многогранников переделивания в решетках не существует и переделивание происходит на пирамиде, в основании которой расположен 2-мерный многогранник переделивания.

$\boldsymbol{n = 4}$. Поскольку многогранники переделивания будем рассматривать только в решетках и как L-многогранники переделивания общего вида, то из диагональных элементов исключаем отрезки.

Учитывая то, что при $n = 4$ многогранник переделивания должен разбиваться только на основные симплексы решетки, имеем только один вид характеристики $(-1, -1, -1, 1, 1, 1)$. Диагональные элементы — два треугольника, пересечение которых является их общим центром тяжести.

В случае базиса B_0 имеем: $A_0 = [-1, -1, 1, 1, 1]$. Применение леммы 11 дает уравнение (начало в точке A_1): $-f(-1, 1, 1, 1) + \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 0$.

В случае правильных треугольников, расположенных в перпендикулярных 2-плоскостях, это уравнение удовлетворяется, так как общий центр тяжести является центром описанной сферы.

$\boldsymbol{n = 5}$. При наших условиях многогранник переделивания имеет характеристику вида

$$(-v^0, -v^1, -v^2, v^3, v^4, v^5, v^6).$$

Ее диагональные элементы — треугольник и тетраэдр. Не нарушая общности, рассмотрим случай $(-2,-1,1,1,1,1)$. Если базис B_0, то $A_0 = \frac{1}{2}[-1,-1,1,1,1,1]$.

Точка G в тетраэдре имеет координаты $[0,0,1/4,1/4,1/4,1/4]$. Эта же точка в треугольнике относительно любого из базисов B_3 – B_6 имеет координаты $[1/2,1/4,1/4,0,0,0]$.

Взяв в качестве начала точку A_1, а в качестве основного симплекса симплекс S^0, записываем на основе леммы 11 уравнение:

$$-2f(-1/2,1/2,1/2,1/2,1/2) - a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{55} = 0.$$

Как пример считаем треугольник и тетраэдр правильными, их плоскости ортогональными и пересекающимися в точке G. Тогда для решетки уравнение леммы 11 удовлетворяется, а соответствующая форма имеет вид

$$f = (x^1)^2 + \frac{13}{16}\sum_{q=2}^{5}(x^q)^2 + \frac{5}{8}\sum_{2\leqslant q<r\leqslant 5} x^q x^r.$$

§ 7. Примеры комплексов переделивания 6-мерных решеток

В отличие от меньших размерностей, при $n = 6$ список комплексов переделивания (17) считаем известным и рассмотрим лишь наиболее симметричные примеры каждого из 6 комплексов.

Построение примеров основано на лемме 9 о разбиении диагональных симплексов на части с объемами, определяемыми целыми числами в стандартной записи характеристики. Построение каждого примера определено выбором обоих диагональных симплексов σ_1 и σ_2. Во всех примерах плоскости диагональных симплексов выбираем ортогональными между собой, симплексы — по возможности — правильными. В построенных примерах комплекс представлен L-многогранником переделивания. Точка пересечения диагональных симплексов, если это было возможно, выбрана совпадающей с центром описанного вокруг многогранника $[K]$ шара.

(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1). Диагональные симплексы — 3-мерные, то есть тетраэдры. Как видно из характеристики, точка их пересечения G определяет пересечение каждого из них на 4 части одинакового объема. Выбираем правильные конгруэнтные симплексы, расположенные в перпендикулярных 3-плоскостях и пересекающиеся своими центрами. Точка G их пересечения является и центром описанного шара. Если потребовать, чтобы радиус этого шара был равен 1, то ребра симплексов нужно взять равными $\sqrt{8/3}$. Метрическая форма репера, построенного по 7 вершинам полученного многогранника $[K]$, имеет вид

$$f_1 = \frac{8}{3}\Big[\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 + x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3\Big] + \\ +2\sum_{j=4}^{6}(x^j)^2 + \frac{4}{3}\big[x^4x^5 + x^4x^6 + x^5x^6\big].$$

Восьмая вершина многогранника относительно заданной этой формой системы координат имеет координаты $(1,1,1,-1,-1,-1)$.

(2,1,1,1,-1,-1,-1,-2). В качестве диагональных тетраэдров возьмем конгруэнтные тетраэдры, у которых точка их пересечения G, делящая их объемы в отношении $2:1:1:1$, совпадает с центром описанного шара. При радиусе описанного шара 1 этому условию удовлетворяют тетраэдры $A_0A_1A_2A_3$ и $B_0B_1B_2B_3$, у которых грани $A_0A_1A_2$, $B_0B_1B_2$ — правильные треугольники со сторонами $\sqrt{5/3}$, а остальные ребра тетраэдров имеют длину $\sqrt{10/3}$.

Соответствующая реперу

$$\{A_0; A_0A_1, A_0A_2A_0A_3, A_0B_1, A_0B_2, A_0B_3\}$$

квадратичная форма имеет вид

$$f_2(x^1,\dots,x^6) = \frac{5}{3}\big[(x^1)^2+(x^2)^2+2(x^3)^2+x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3\big]+ \\ +2\sum_{j=4}^{6}(x^j)^2+\frac{2}{3}\big(x^4x^5+x^4x^6\big)+\frac{7}{3}x^5x^6.$$

Относительно названного выше репера точка B_0 имеет координаты (2,1,1,-1,-1,-2).

(2,2,1,1,-1,-1,-1,-3). Не существует тетраэдра, у которого точка деления его объема в отношении $1:1:1:3$ совпадала бы с центром описанного шара, поэтому в предложенном примере точка пересечения диагональных тетраэдров не будет центром описанного вокруг L-многогранника $[K]$ шара.

Диагональные тетраэдры возьмем следующие. У тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ точка, делящая его объем в отношении $2:2:1:1$, совпадает с центром описанного шара и радиус этого шара равен 1, два противоположных ребра имеют длины $\sqrt{2}$ и $\sqrt{7/2}$, длина остальных ребер равна $\sqrt{3/2}$.

Тетраэдр $\sigma_2 = B_0B_1B_2B_3B_4$ правильный, с ребрами длиной $\sqrt{3}$, центр описанного вокруг него шара отстоит от точки пересечения с другим диагональным тетраэдром на расстояние $GO = 1/\sqrt{8}$, радиус описанного вокруг тетраэдра σ_2 шара равен $3/\sqrt{8}$.

(1,1,1,1,1,-1,-1,-3), (1,1,1,1,1,-1,-2,-2). В обоих случаях в качестве 4-мерного симплекса выбираем правильный симплекс с длиной ребра $\sqrt{12/5}$ (радиус описанного шара 1), а центр каждого из этих симплексов (он делит объем симплекса на 5 равных частей, как это требуется в характеристиках) считаем точкой G пересечения диагональных симплексов. Не существует треугольников, у которых центр описанного круга совпадал бы с точкой, делящей его площадь в отношении $1:1:3$. В качестве диагонального треугольника в предложенном примере взят правильный треугольник со сторонами $5/\sqrt{7}$.

Соответствующая нашему примеру решетка задана следующей квадратичной формой (как и в предшествующих примерах, при записи формы взят репер, определенный 7 вершинами L-многогранника $[K]$, при отброшенной вершине B_0 треугольника $\sigma_2 = B_0B_1B_2$):

$$f_4 = \frac{12}{5}\Big(\sum_{i=1}^{4}(x^i)^2 + \sum_{i<j} x^ix^j\Big) + \frac{8}{5}(x^5)^2 + \frac{12}{5}(x^6)^2 + \frac{4}{5}x^5x^6.$$

Во втором комплексе точка G совпадает с центром описанного вокруг треугольника круга — она делит площадь треугольника в требуемом характеристикой отношении $1:2:2$. Примеру соответствует решетка, заданная формой

$$f_5 = \frac{12}{5}\Big(\sum_{i=1}^{4}(x^i)^2 + \sum_{i<j} x^ix^j\Big) + 2(x^5)^2 + 2(x^6)^2 + \frac{1}{7}x^5x^6.$$

(2,1,1,1,1,-1,-2,-3). В качестве диагонального 4-мерного симплекса взят симплекс, у которого центр описанного вокруг него шара (радиус шара 1) совпадает с точкой G, делящей его объем в отношении 2:1:1:1:1, как требует характеристика. Эта точка взята за точку пересечения симплекса и диагонального треугольника — правильного треугольника со стороной $6/\sqrt{11}$, площадь которого точка G делит в отношении $1:2:3$. Примеру соответствует решетка, заданная формой

$$f_6 = 2\Big(\sum_{i=1}^{4}(x^i)^2 + x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 + x^4\sum_{i=1}^{3}x^i\Big) + \\ + 3(x^4)^2 + \frac{24}{11}(x^5)^2 + \frac{18}{11}(x^6)^2 + \frac{6}{11}x^5x^6.$$

Доказательство того, что в приведенных примерах многогранники переделивания являются L-многогранниками построенных на них решеток, строится на базе утверждения, аналогичного лемме 11.

Из примеров последних двух параграфов следует

Предложение 2. *В пространствах размерностей $n \leqslant 6$ существуют решетки, содержащие в качестве L-многогранников многогранники переделивания, у которых диагональные симплексы расположены в ортогональных плоскостях, причем в тех случаях, когда характеристика может быть записана симметрично, и для характеристики* $(1,1,1,1,1,-1,-2,-2)$ *точка пересечения диагональных симплексов может быть взята и в центре описанного вокруг многогранника шара.*

Пользуюсь случаем выразить благодарность проф. В. П. Гришухину за помощь в работе над статьей.

Библиографический список

1. *Барановский Е. П.* Объемы L-симплексов пятимерных решеток // Мат. заметки. 1973. Т. 13. N 5. С. 771—782.
2. *Барановский Е. П.* Условия, при которых симплекс 6-мерной решетки является L-симплексом // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2. Иваново, 1999. С. 18—24.

3. *Барановский Е. П., Гришухин В. П.* Алгоритм вычисления степени нежесткости L-разбиения решетки // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 116—122.
4. *Вороной Г. Ф.* Исследования о примитивных параллелоэдрах // Собр. соч. Киев, 1952. Т. 2. С. 239—368.
5. *Рышков С. С., Барановский Е. П.* С-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры: (С приложением к теории покрытий) // Тр. МИАН СССР. 1976. Т. 137. С. 3—131.
6. *Ryshkov S. S., Baranovskii E. P.* Repartioning complexes in n-dimensional lattices: (With full description for $n \leqslant 6$) // Voronoi's impact on modern science. Kiev, 1998. Vol. 2. P. 115—124.