Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2002 С. 110 – 117

А. С. Белов

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ СНИЗУ ЧАСТНЫМИ СУММАМИ

Известно, что если неотрицательная монотонно невозрастающая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что последовательность $\{n\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то все частные суммы четного тригонометрического ряда с коэффициентами $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно на всей прямой ограничены снизу. В статье доказывается, что этот результат неулучшаем даже для класса рядов, коэффициенты которых удовлетворяют условию $\Delta^j\, a_n > 0$ при всех целых неотрицательных j и n.

It is known that all partial sums of even trigonometric series with coefficients $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ are uniformly bounded from below on all straight line if the non-negative monotone nonincreasing sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is such that the sequence $\{n\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is bounded. In the article is proved that this result is unimprovable even for class of series coefficients of which satisfy the condition $\Delta^j\, a_n > 0$ for all non-negative integers j and n. The repartitioning complex in L-decompositions of lattices corresponds to transformations from one primitive L-type to another. In this paper the structure of the repartitioning complexes is obtained on the base on characteristics of complexes and their diagonal simplexes.

УДК 517.5.

1. Для заданной последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ через

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)\,, \quad n = 0, 1, \dots\,, \tag{1}$$

будем обозначать частные суммы тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\,. \tag{2}$$

Как обычно,

$$\Delta\, a_n = \Delta^1\, a_n = a_n - a_{n+1}\,,$$

$$\Delta^j\, a_n = \Delta^{j-1}\, a_n - \Delta^{j-1}\, a_{n+1}\,, \quad n = 0, 1, \dots\,,\ j = 2, 3, \dots\,.$$

Говорят, что частные суммы ряда (2) равномерно ограничены снизу, если существует такая постоянная C, что $S_n(x) \geqslant C$ при всех действительных x и целых $n \geqslant 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00315).

Пусть $\alpha \in (0,1)$ есть (единственный) корень уравнения

$$\int_0^{3\pi/2} t^{-\alpha} \cos t \, dt = 0 \, .$$

Известно, что $\alpha = 0.308\ldots$ и существует (см. [4, с. 307]) такая положительная постоянная B, например, можно взять $B = 2$, что

$$B + \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} \cos(kx) > 0 \qquad \text{для всех } x \text{ и } n = 0, 1, \ldots \, . \tag{3}$$

Этот результат Зигмунд (см. [4, с. 307 и 592]) приписывает Литтлвуду, Салему и Изуми.

Автором (см. [1, теоремы 2 и 3; 2, утверждение 3]) доказана

Теорема A. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел. Тогда, если выполнено условие*

$$S_n(x) \geqslant 0 \qquad \textit{при всех } x \in (0,\pi) \textit{ и } n = 1, 2, \ldots \, , \tag{4}$$

то

$$a_n \leqslant 8 \, a_0 \, (n+1)^{-\alpha} \qquad \textit{при всех} \quad n = 0, 1, \ldots \, . \tag{5}$$

В частности, для того чтобы частные суммы ряда (2) были равномерно ограничены снизу, необходимо, чтобы последовательность $\{n^{\alpha} \, a_n\}_{n=1}^{\infty}$ была ограничена, и достаточно, чтобы для некоторого целого неотрицательного числа m последовательность $\{(n+m)^{\alpha} \, a_n\}_{n=1}^{\infty}$ была, начиная с некоторого места, невозрастающей.

Пример (3) показывает, что оценка (5) неулучшаема по порядку.

Довольно легко доказывается (см., напр., [2, следствие 9])

Теорема B. *Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и*

$$a_n = O(n^{-1}) \qquad \textit{при} \ \ n \to \infty \, . \tag{6}$$

Тогда частные суммы ряда (2) равномерно ограничены снизу.

В связи с теоремами A и B возникает вопрос о том, для каких положительных последовательностей $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ останется верной теорема B, если условие (6) заменить на условие

$$a_n = O(c_n) \qquad \text{при} \ \ n \to \infty \, . \tag{7}$$

Оказывается, если последовательность положительных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$n \, c_n \to \infty \qquad \text{при} \ \ n \to \infty \, , \tag{8}$$

то условие (6) в теореме B заменить на условие (7) нельзя. Это показывает следующая (см. [2, теорема 6])

Теорема C. *Для любой последовательности положительных чисел* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, *которая удовлетворяет условию* (8), *можно построить монотонно стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *так, что*

$$a_n \leqslant c_n \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 0\,, \tag{9}$$

функция

$$f(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \tag{10}$$

на интервале $(0, 2\pi)$ *непрерывна и неограничена ни снизу, ни сверху и*

$$f \in L^p_{2\pi} \qquad \text{при всех} \quad p \in (0, \infty)\,. \tag{11}$$

В частности, частные суммы ряда (10) *не являются равномерно ограниченными снизу.*

Напомним, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется выпуклой, если $\Delta^2\,a_n \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 0$. Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ выпукла и стремится к нулю, то она монотонно не возрастает и для функции (10) справедливо представление

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2\,a_n\,\frac{\sin^2((n+1)x/2)}{2\sin^2(x/2)}\,.$$

В частности, в этом случае функция (10) неотрицательна на прямой. Поэтому возникает вопрос о том, можно ли ослабить условие (6) в теореме B, заменяя его на условие (7), если заранее предполагается, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ является выпуклой. Оказывается, этого также сделать нельзя, поскольку верна (см. [3, теорема 1])

Теорема D. *Для любой последовательности положительных чисел* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, *которая монотонно стремится к нулю и удовлетворяет условию* $\sup\{n\,c_n\,:\,n \geqslant 1\} = \infty$, *можно построить монотонно стремящуюся к нулю выпуклую последовательность положительных чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *так, что выполнено* (9), *функция* (10) *положительна на прямой,* $f(x) \to \infty$ *при* $x \to 0$ *и справедливо* (11), *но частные суммы ряда* (10) *не являются равномерно ограниченными снизу.*

Цель данной статьи — доказательство следующего результата.

Теорема. *Для любой последовательности положительных чисел* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, *которая удовлетворяет условию* (8), *можно построить монотонно стремящуюся к нулю выпуклую последовательность положительных чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *так, что*

$$\Delta^j\,a_n > 0 \quad \text{при всех} \quad j \geqslant 1 \quad \text{и} \quad n \geqslant 0\,, \tag{12}$$

выполнено (9), *функция* (10) *положительна на прямой и аналитична на интервале* $(0, 2\pi)$, *справедливо* (11), *но частные суммы ряда* (10) *не являются равномерно ограниченными снизу.*

Таким образом, даже если предполагать заранее, что коэффициенты ряда (2) удовлетворяют условию (12), то условие (6) в теореме B нельзя заменить на условие (7) так, чтобы выполнялось (8).

2. Доказательство теоремы. Пусть $r \in [0,1)$. Тогда

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} r^k\cos(kx)=\frac{(1-r^2)/2+r^{n+2}\cos(nx)-r^{n+1}\cos((n+1)x)}{(1-r)^2+4r\sin^2(x/2)}\,, \quad n=0,1,\dots\,. \tag{13}$$

При натуральном n обозначим

$$V_n(r)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} r^k\cos\Big(k\,\frac{3\pi}{2n}\Big)\,. \tag{14}$$

Отсюда и из (13) получаем

$$V_n(r)=\frac{(1-r^2)/2-r^{n+1}\sin(3\pi/(2n))}{(1-r)^2+4r\sin^2(3\pi/(4n))}\,. \tag{15}$$

Следовательно,

$$|V_n(r)|<\frac{1-r+r^{n+1}3\pi/(2n)}{(1-r)^2}<\frac{1}{1-r}+\frac{3\pi r^n}{2n(1-r)^2}\,.$$

Поскольку $(1-1/n)^n<e^{-1}$, то при $r\in[\,0\,,1-1/n\,]$ имеем

$$|V_n(r)|<\frac{1}{1-r}+\frac{3\pi e^{-1}}{2(1-r)}<\frac{1+3\pi/5}{1-r}<\frac{3}{1-r}\,.$$

Итак, верна оценка

$$|V_n(r)|<\frac{3}{1-r}\quad \text{при}\quad r\in\Big[\,0\,,1-\frac{1}{n}\,\Big]\quad \text{и}\quad n\geqslant 1\,. \tag{16}$$

Нам также потребуется оценка

$$-V_n(r)>\frac{n}{94}\quad \text{при}\quad r\in\Big[\,1-\frac{1}{n}\,,1\Big)\quad \text{и}\quad n\geqslant 9\,. \tag{17}$$

Действительно, пусть $r\in[\,1-1/n\,,1\,)$. Тогда из (15) вытекает

$$-V_n(r)\geqslant\frac{r^{n+1}\sin(3\pi/(2n))-(1-r)}{(1-r)^2+4r\sin^2(3\pi/(4n))}\,.$$

Функция $\sin x/x$ убывает на $(0,\pi]$. Поэтому $\sin x\geqslant 3x/\pi$ при $x\in[\,0,\pi/6\,]$. Значит, если $n\geqslant 9$, то

$$\sin\Big(\frac{3\pi}{2n}\Big)\geqslant\frac{9}{2n}\quad \text{и}\quad -V_n(r)\geqslant\frac{9r^{n+1}/(2n)-1/n}{(1-r)^2+4r\sin^2(3\pi/(4n))}\,.$$

Поскольку

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n+1} > e^{-1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^2 \geqslant e^{-1}\Big(\frac{8}{9}\Big)^2 > \frac{5}{18}\,,$$

то

$$-V_n(r) \geqslant \frac{5/(4n)-1/n}{(1-r)^2+4(3\pi/(4n))^2} \geqslant \frac{n}{4+9\pi^2}\,.$$

Отсюда сразу получаем оценку (17).

Теперь перейдем к построению последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Для этого возьмем произвольные постоянные

$$B > 282 \quad \text{и} \quad D \geqslant 2\,. \tag{18}$$

Положим

$$w(n) = \min\Big\{c_n\,,\, c_1\frac{(1+\ln n)}{n}\Big\} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1 \tag{19}$$

и

$$\beta = \min\{c_0\,, \min\{n\,c_n : n \geqslant 1\}\}\,. \tag{20}$$

Тогда $\beta > 0$ и, в силу (8),

$$n\,w(n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty\,. \tag{21}$$

Найдем последовательность положительных чисел $\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, что

$$\gamma_1 \leqslant \frac{\beta}{2} \quad \text{и} \quad \gamma_m \geqslant B\sum_{k=1}^{m-1}\gamma_k \quad \text{при} \quad m \geqslant 2\,. \tag{22}$$

Например, можно взять

$$\gamma_m = \frac{\beta}{2}\,\eta^{\,m-1} \quad \text{при} \quad m \geqslant 1\,,$$

где $\eta \geqslant B+1$. Из (22) следует, что $\gamma_m \to \infty$ при $m \to \infty$.

Последовательность натуральных чисел

$$1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_m < \ldots$$

подберем так, что

$$\inf\{n\,w(n) : n \geq n_m\} \geqslant D\sum_{k=1}^{m+1}\gamma_k \quad \text{при} \quad m \geqslant 1 \tag{23}$$

и

$$n_m \geqslant \frac{2\gamma_m}{\gamma_{m-1}}\,n_{m-1} \quad \text{при} \quad m \geqslant 2\,. \tag{24}$$

Это возможно в силу (21). Из (24) имеем

$$\frac{\gamma_m}{n_m} \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\gamma_{m-1}}{n_{m-1}} \quad \text{при} \quad m \geqslant 2\,. \tag{25}$$

Поэтому
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{n_m} < \infty \,. \tag{26}$$
Положим
$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{n_m} \Big(1 - \frac{1}{n_m}\Big)^n \quad \text{при} \quad n \geqslant 0 \,. \tag{27}$$
Этим построена последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Докажем, что она удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Из (26) и (27) ясно, что $a_n \to 0 \quad$ при $\quad n \to \infty$ и
$$\Delta^j \, a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{n_m^{j+1}} \Big(1 - \frac{1}{n_m}\Big)^n > 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant 0 \ \text{ и } \ j \geqslant 1 \,.$$
Значит, (12) верно. При $n \geqslant 0$, используя обозначение (1), из (27) имеем
$$S_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{n_m} \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{n_m}\Big)^k \cos(kx) \Big) \,. \tag{28}$$
Отсюда и из (14) при натуральных n получаем
$$S_n\Big(\frac{3\pi}{2n}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{n_m} V_n\Big(1 - \frac{1}{n_m}\Big) \,.$$
Поэтому при $n \geqslant 9$ из оценок (16) и (17) выводим
$$\begin{aligned} S_n\Big(\frac{3\pi}{2n}\Big) &= \sum_{m:n_m<n} \frac{\gamma_m}{n_m} V_n\Big(1 - \frac{1}{n_m}\Big) + \sum_{m:n_m \geqslant n} \frac{\gamma_m}{n_m} V_n\Big(1 - \frac{1}{n_m}\Big) \leqslant \\ &\leqslant 3 \sum_{m:n_m<n} \gamma_m + \sum_{m:n_m \geqslant n} \frac{\gamma_m}{n_m} \Big(-\frac{n}{94}\Big) = \\ &= 3 \sum_{m:n_m<n} \gamma_m - \frac{n}{94} \sum_{m:n_m \geqslant n} \frac{\gamma_m}{n_m} \,. \end{aligned}$$
Следовательно, если $n_m \geqslant 9$, то, используя оценку (22), получаем
$$\begin{aligned} S_{n_m}\Big(\frac{3\pi}{2n_m}\Big) &= 3 \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k - \frac{n_m}{94} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n_k} \leqslant \\ &\leqslant \frac{3}{B} \gamma_m - \frac{\gamma_m}{94} = \Big(\frac{3}{B} - \frac{1}{94}\Big) \gamma_m \,. \end{aligned}$$
В силу (18) величина $3/B - 1/(94) < 0$. Поэтому
$$S_{n_m}\Big(\frac{3\pi}{2n_m}\Big) \to -\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty \,.$$
В частности, частные суммы построенного ряда (2) не являются равномерно ограниченными снизу.

Если $n = 0, \dots, n_1$, то из (27), (25) и (20) выводим

$$a_n \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{n_m} \leqslant \frac{2\gamma_1}{n_1} \leqslant \frac{\beta}{n_1} \leqslant c_n\,. \tag{29}$$

Пусть $m \geqslant 2$ и $n_{m-1} < n \leqslant n_m$. Тогда, поскольку $1 - t \leqslant e^{-t}$ и $e^y \geqslant ey$, из (27), (25) и (23) имеем

$$\begin{aligned} a_n &\leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\gamma_k}{n_k} \Big(1 - \frac{1}{n_k}\Big)^n + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n_k} \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{e}\,\frac{\gamma_k}{n} + \frac{2\gamma_m}{n_m} \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \leqslant \frac{2}{Dn}\ \inf\{s\,w(s) : s \geqslant n_{m-1}\} \leqslant \frac{2}{D}\,w(n)\,. \end{aligned}$$

Отсюда и из (18) получаем, что

$$a_n \leqslant w(n) \quad \text{при} \quad n > n_1\,.$$

В силу (19) и (29) приходим к выводу, что верно (9) и

$$a_n \leqslant c_1 \frac{(1 + \ln n)}{n} \quad \text{при} \quad n > n_1\,.$$

Но из (29) и (20) видим, что при $n = 1, \dots, n_1$ будет

$$a_n \leqslant \frac{\beta}{n_1} \leqslant \frac{c_1}{n_1} \leqslant \frac{c_1}{n} \leqslant c_1 \frac{(1 + \ln n)}{n} \quad \text{и} \quad a_0 \leqslant \frac{\beta}{n_1} \leqslant \beta \leqslant c_1\,.$$

Поэтому

$$a_0 \leqslant c_1 \quad \text{и} \quad a_n \leqslant c_1 \frac{(1 + \ln n)}{n} \quad \text{при всех} \quad n = 1, 2, \dots\,. \tag{30}$$

Поскольку коэффициенты ряда (10) выпуклы, то функция (10) в силу (12) положительна и при каждом натуральном N и

$$x \in \Big[\, \frac{\pi}{N+1}\,, \frac{\pi}{N}\,\Big]$$

в силу (30) имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{2\sin^2(x/2)} \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \Delta^2 a_n \frac{(n+1)^2}{2} + \\ &+ \sum_{n=N}^{\infty} \Delta^2 a_n \frac{1}{2\sin^2(x/2)} = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta\, a_n \Big(n + \frac{1}{2}\Big) + \\ &+ \Big(\frac{1}{2\sin^2(x/2)} - \frac{N^2}{2}\Big)\,\Delta\, a_n \leqslant \sum_{n=0}^{N} \Delta\, a_n \Big(n + \frac{1}{2}\Big) < \\ &< \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \leqslant c_1 \Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(1 + \ln n)}{n}\Big) \leqslant \\ &\leqslant c_1 \Big(\frac{3}{2} + \int_1^N \frac{(1 + \ln t)}{t}\, dt\Big) = c_1 \Big(\frac{(1 + \ln N)^2}{2} + 1\Big) \leqslant \\ &\qquad \leqslant c_1 \Big(1 + \frac{1}{2}\Big(1 + \ln\Big(\frac{\pi}{x}\Big)\Big)^2\Big)\,. \end{aligned}$$

Значит,

$$0<\frac{1}{2}\,\Delta^2\,a_0\leqslant f(x)<\frac{1}{2}\,c_1\left(2+\left(1+\ln\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)^2\right)\quad\text{при всех}\quad x\in(0,\pi]\,,$$

и поэтому условие (11) выполнено.

Из (26), (28) и (13), устремляя n в бесконечность, при всех $x\in(0,2\pi)$ имеем

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma_m}{n_m}\left(\frac{n_m-1/2}{1+4(n_m-1)n_m\sin^2(x/2)}\right).$$

Поэтому функция f продолжается как аналитическая функция в полосу $0<\operatorname{Re}z<2\pi$ по формуле

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n_m}\right)\frac{\gamma_m}{(2n_m^2-2n_m+1-n_m(n_m-1)(e^{iz}+e^{-iz}))}\,.$$

Заметим, что последний ряд сходится равномерно в полосе $\varepsilon\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant 2\pi-\varepsilon$ при любом $\varepsilon\in(0,\pi)$. В частности, функция f бесконечно дифференцируема в интервале $(0,2\pi)$. Теорема полностью доказана.

Библиографический список

1. *Белов А. С.* О коэффициентах тригонометрических рядов с неотрицательными частичными суммами // Мат. заметки. 1987. Т. 41. № 2. С. 152—158.
2. *Белов А. С.* О коэффициентах тригонометрических косинус-рядов с неотрицательными частными суммами // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 190. С. 3—21.
3. *Белов А. С.* О частных суммах тригонометрического ряда с выпуклыми коэффициентами // Мат. заметки. 1991. Т. 50. № 4. С. 21—27.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.