Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2002 С. 118 – 122

С. В. Колесников

О НЕЛОКАЛЬНОСТИ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ИЗ H^∞

Доказывается, что свойство непрерывности функции наилучшего приближения в H^∞ не является локальным свойством. Существуют функции $F(z)$ и $f(z)$, непрерывные на единичной окружности, значения которых совпадают на некоторой дуге ($f(z) = F(z)$, $z \in \gamma$), такие, что функция наилучшего приближения из H^∞ для F непрерывна на всей единичной окружности, а функция наилучшего приближения для f имеет точки разрыва на дуге γ.

In this article it is proved that the property of continuity of function of the best approximation in H^∞ is not local property. There exist functions $F(z)$ and $f(z)$, continuous on the unit circle and equal on an arc γ of this circle ($f(z) = F(z)$, $z \in \gamma$), such that the function of the best approximation from H^∞ for F is continuous on unit circle and the function of the best approximation for f has points of discontinuity on γ.

УДК 517.53.

Пусть D — единичный круг $|z| < 1$, Γ — единичная окружность $|z| = 1$, H^∞ — пространство функций, ограниченных и аналитических в D, $L^\infty(\Gamma)$ — пространство функций, определенных и конечных почти всюду на окружности $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ с нормой

$$||f||_\infty = \sup \mathrm{vrai}_{z\in\Gamma}|f(z)| < \infty\,.$$

Через $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, будем обозначать угловой предел f в ζ. По теореме Фату каждая функция $f \in H^\infty$ имеет почти в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ конечный угловой предел $f(\zeta)$. Обозначим через $H^\infty(\Gamma)$ подпространство пространства $L^\infty(\Gamma)$, состоящее из всех граничных функций $f(\zeta)$ для функций $f \in H^\infty$.

Пусть $f \in L^\infty(\Gamma)$. Функция $g(z) = g(f, z) \in H^\infty(\Gamma)$ называется функцией наилучшего приближения для функции $f(z)$ в классе $H^\infty(\Gamma)$, если для любой функции $q(z) \in H^\infty(\Gamma)$ будет

$$||f - g||_\infty \le ||f - q||_\infty.$$

Ниже доказывается, что свойство непрерывности функции наилучшего приближения не является локальным свойством приближаемой функции, то есть, что существуют функции $F(z)$ и $f(z)$, непрерывные

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00913).

на окружности Γ, значения которых совпадают на некоторой дуге $\gamma \subset \Gamma$ ($f(z) = F(z)$, $z \in \gamma$), такие, что функция наилучшего приближения из $H^\infty(\Gamma)$ для F непрерывна на всей окружности Γ, а функция наилучшего приближения для f имеет точки разрыва на дуге γ.

Для построения таких функций потребуется следующая лемма, являющаяся обобщением леммы 2.5 из [2, гл. IV, с. 147].

Лемма. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна на окружности Γ, $g(z) \in H^\infty$ — функция наилучшего приближения для $f(z)$ из H^∞ и $||f-g||_\infty = 1$.*

Пусть $\rho(z)$ и $\alpha(z)$ соответственно модуль и аргумент разности $f(z) - f(1)$; $\Omega(z) = e^{i\alpha(z)}$.

Если $g(z)$ непрерывна в точке $z = 1$ и выполняются условия

1) $$\int\limits_0 \frac{\rho(e^{it})}{|t|} dt = \infty,$$

2) $$\lim_{t\to 0} \Omega(e^{it}) \cdot \operatorname{sign} t = e^{i\theta_0}, \quad \theta_0 \in [0,\, 2\pi],$$

то или $g(1) = f(1) + ie^{i\theta_0}$, или $g(1) = f(1) - ie^{i\theta_0}$.

Доказательство. Положим $f_1(z) = f(z) - f(1)$, $g_1(z) = g(z) - f(1)$. Тогда почти всюду на Γ будет выполнено равенство

$$|f_1(z) - g_1(z)| = 1. \tag{1}$$

Отсюда, в силу непрерывности функции $g(z)$ в точке $z = 1$, следует, что $|g_1(1)| = 1$. Пусть $g_1(1) = e^{i\theta_1}$, $\theta_1 \in [0,\, 2\pi]$. При $z \in \Gamma$ имеем

$$|g_1(z)|^2 = 1 + 2\mathrm{Re}\, f_1(z)\overline{g(z)} - |f_1(z)|^2 =$$

$$= 1 + 2\mathrm{Re}\, f_1(z)e^{-i\theta_1} + 2\mathrm{Re}\, f_1(z)\overline{(g_1(z) - g_1(1))} - |f_1(z)|^2.$$

Так как при $z = e^{it}$ $\lim_{t\to 0} f_1(z) \to 0$, $\lim_{t\to 0}(g_1(z) - g_1(1)) \to 0$ и по условию 2) $\lim_{t\to 0}(\Omega(z) - e^{i\theta_0} \cdot \operatorname{sign} t) \to 0$, то

$$|g_1(z)|^2 = 1 + 2\mathrm{Re}\, \rho(z)e^{i(\theta_0-\theta_1)}\operatorname{sign} t +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\, \rho(z)e^{-i\theta_1}\left(\Omega(z) - e^{i\theta_0}\operatorname{sign} t\right) + 2\mathrm{Re}\, f_1(z)\overline{(g_1(z) - g_1(1))} - |f_1(z)|^2 =$$

$$= 1 + 2\rho(z)\cos(\theta_0 - \theta_1)\operatorname{sign} t + o\left(\rho(z)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\ln|g_1(z)| = 2\rho(z)\cos(\theta_0 - \theta_1)\operatorname{sign} t + o\left(\rho(z)\right).$$

Если $\cos(\theta_0 - \theta_1) \neq 0$, то в некоторой достаточно малой окрестности $(-\varepsilon,\, \varepsilon)$ точки $t = 0$ дробь

$$\frac{\ln|g_1(e^{it})|}{t}$$

принимает значения одного знака (того же, что и знак $\cos(\theta_0-\theta_1)$) и

$$|\ln|g_1(e^{it})|| > \frac{1}{2}\rho(e^{it})|\cos(\theta_0-\theta_1)|.$$

Отсюда

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\ln|g_1(e^{it})|}{t}\right| = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left|\frac{\ln|g_1(e^{it})|}{t}\right|dt > \frac{|\cos(\theta_0-\theta_1)|}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\rho(e^{it})}{|t|}\,dt=\infty. \qquad (2)$$

Из непрерывности функции $g_1(z)$ в точке $z=1$ следует, что для достаточно малого $0<\delta<\varepsilon$ на пересечении $W=D\cap\{|z-1|<\delta\}$ выполняется неравенство $|g_1(z)|>1/2$. Пусть $\mu(z)$ — функция, отображающая конформно и взаимно-однозначно круг D на W так, что $\mu(1)=1$, диаметр $[-1,\,1]$ отображается на отрезок $[1-\delta,\,1]$, а правая половина Γ^+ окружности Γ — на дугу окружности Γ, лежащую в круге $|z-1|<\delta$. По принципу симметрии, это отображение симметрично относительно действительной оси. Кроме того, $\mu(z)$ продолжается аналитически через Γ^+ и имеет на Γ^+ отличную от нуля производную. Пусть $\omega(t)=\arg\mu(e^{it})$ (считаем, что $|\arg z|<\pi/2,\ z\in\Gamma^+$), так, что

$$\mu(e^{it})=e^{i\omega(t)}.$$

Рассмотрим функцию $\Phi(z)=\ln g_1(\mu(z))$. Поскольку g_1 не имеет нулей в W и непрерывна на замыкании W, то Φ голоморфна в D и непрерывна на Γ. Пусть $U(z)$ и $V(z)$ — соответственно, действительная и мнимая части $\Phi(z)$. Тогда $U(z)=\ln|g_1(\mu(z))|$ непрерывна в точке 1 и, как известно (см., напр., [1, гл. 8, § 6]), будет

$$V(r)-V(0)+\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\,\pi]\setminus(-\nu,\,\nu)}U(e^{it})\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}dt\to 0 \qquad (3)$$

при $\nu=\arcsin(1-r)$, $r\to 1$.

Последний интеграл расходится при $\nu\to 0$.

Действительно, при $|t|<\pi/2$ будет $|\omega(t)|<\delta<\varepsilon$ и выражение

$$\frac{U(e^{it})}{\omega(t)}=\frac{\ln|g_1(e^{i\omega(t)})|}{\omega(t)}$$

принимает значения одного знака. Так как при $|t|<\pi/2$ знаки t и $\omega(t)$ совпадают, то выражение

$$U(e^{it})\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}=\frac{\ln|g_1(e^{i\omega(t)})|}{\omega(t)}\omega(t)\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}$$

также принимает значения одного знака. Учитывая, что $\omega(t)$ в силу дифференцируемости $\mu(z)$ дифференцируема и $\omega'(0)>0$, то из (2) и следует, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\ln|g_1(e^{it})|\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}\,dt=\pm\infty.$$

Отсюда и из (3) следует, что $V(r)$ неограничена при $r \to 1-0$, что противоречит непрерывности функции $g(z)$ в точке 1.

Таким образом, должно быть $\cos(\theta_0 - \theta_1) = 0$, $e^{i\theta_1} = \pm i e^{i\theta_0}$ и $g(1) = f(1) + g_1(1) = f(1) \pm i e^{i\theta_0}$.

Лемма доказана.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРА. Определим функцию

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign} t}{\ln(2\pi/|t|)}, t \in [-\pi,\, \pi], t \neq 0; \\ \qquad\qquad 0,\ t = 0. \end{cases}$$

Пусть $t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n,\, \ldots$ — все рациональные числа интервала $(-\pi,\, \pi)$.

Положим

$$\varphi(t) = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varphi_0(t - t_n), \tag{4}$$

где постоянная $c > 0$ выбрана так, что $\varphi(\pi) - \varphi(-\pi) = 2\pi$, и

$$F(z) = e^{-i\varphi},\ \ t \in (-\pi,\, \pi].$$

Функция $\varphi(t)$ непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций и монотонно возрастает на $[-\pi,\, \pi]$, а функция $F(z)$ непрерывна на Γ. При этом

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_n)}{t - t_n} > 0,\ \ \int_0 \frac{\varphi(t) - \varphi(t_n)}{t - t_n} dt = \infty,\ \ n = 1,\, 2,\, \ldots. \tag{5}$$

Так как $\varphi(\pi) - \varphi(-\pi) = 2\pi$, то приращение $\operatorname{Arg} f(z)$ вдоль Γ равно -2π, то есть точка $f(z)$ делает один оборот по окружности Γ в отрицательном направлении при обходе точки z по Γ в положительном направлении. По теореме Пореды [3] непрерывная функция постоянного модуля на Γ тогда и только тогда плохо приближаема (то есть имеет равную нулю функцию наилучшего приближения), когда ее число вращений на Γ отрицательно. Функция $F(z)$ удовлетворяет этому условию, поэтому ее функция наилучшего приближения равна нулю, а следовательно, непрерывна.

Изменим значения функции $F(z)$ на $\Gamma \setminus \Gamma^+$ так, чтобы она осталась непрерывной, но чтобы ее модуль уже не был равен 1. Полученную функцию обозначим через $f(z)$, а ее функцию наилучшего приближения — через $g(z)$. Для числа t_n, $n = 1,\, 2, \ldots$, определим функцию

$$f^*(z) = \frac{1}{\rho} f(e^{it_n} z),$$

где $\rho = ||f - g||_\infty$. Функция наилучшего приближения для $f^*(z)$ равна

$$g^*(z) = \frac{1}{\rho} g(e^{it_n} z),\ \ \text{и}\ \ ||f^* - g^*||_\infty = 1.$$

Нетрудно видеть, что

$$f^*(e^{it}) - f^*(1) = e^{i\varphi(t+t_n)} - e^{i\varphi(t_n)} = \rho(e^{it})\Omega(e^{it}),$$

где

$$\rho(e^{it}) = 2\left|\sin\frac{\varphi(t+t_n)-\varphi(t_n)}{2}\right|, \quad \Omega(e^{it}) = (\operatorname{sign} t) i e^{i(\varphi(t+t_n)+\varphi(t_n)/2}.$$

При этом

$$\lim_{t\to 0}\Omega(e^{it})\operatorname{sign} t = ie^{i\varphi(t_n)}. \tag{6}$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$, по (4) следует, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\rho(e^{it})}{|t|}\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{2\left|\sin\frac{\varphi(t+t_n)-\varphi(t_n)}{2}\right|}{|t|}\,dt >$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{2}{\pi}\frac{|\varphi(t+t_n)-\varphi(t_n)|}{|t|}\,dt = \infty. \tag{7}$$

Если $g(t)$ непрерывна в точке e^{it_n}, то по лемме из (6) и (7) следует, что

$$g^*(1) = f^*(1) \pm e^{i\varphi(t_n)}.$$

Или

$$g(e^{it_n}) = f(e^{it_n}) \pm \rho f(e^{it_n}) = f(e^{it_n})(1\pm\rho).$$

Отсюда следует, что если $g(z)$ непрерывна в каждой точке полуокружности Γ^+, то в последнем равенстве будет или знак “+” для всех $n = 1, 2, \ldots,$ или “-”, и сразу для всех точек полуокружности Γ^+ имеет место одно из равенств

$$g(z) = f(z)(1+\rho), \quad z\in\Gamma^+ \text{или} \;\; g(z) = f(z)(1-\rho), \quad z\in\Gamma^+.$$

Следовательно, на Γ^+ модуль функции $g(z)$ постоянен. По принципу симметрии, $g(z)$ продолжается аналитически через Γ^+, а это противоречит тому, что $f(e^{it})$ не дифференцируема в точках e^{it_n}, $n = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, функция $g(z)$ наилучшего приближения из H^∞ для функции $f(z)$ имеет точки разрыва на Γ^+, а функция $F(z)$, равная $f(z)$ на Γ^+, имеет непрерывную функцию наилучшего приближения.

Библиографический список

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.
2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
3. *Poreda S. I.* A characterizaition of badly approximable function // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 169. P. 249—256.