Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2002 С. 134 – 140

С. В. Пухов, Е. А. Сухарева

КОНИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ КРИВЫХ И МОМЕНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Рассматриваются системы линейно независимых функций, имеющих положительный обобщенный многочлен. Для моментных пространств по таким системам устанавливаются выпуклость, замкнутость и свойство быть конусом, а также связь таких моментных пространств с коническими оболочками кривых.

Linearly independent systems of functions with positive generalized polinomial are considered. The properties of convexity closure and to be a cone for moment spaces as well as connection of such spaces with conic hull of curves are established.

УДК 517.53.

Введение

Работа посвящена исследованию моментных пространств. Геометрический подход к теории моментов восходит к Каратеодори (1907). Приемы, связанные с выпуклыми множествами и выпуклыми конусами, играли существенную роль в его исследованиях.

Теоремы 1 и 2 данной работы обобщают результаты главы 2 из [2], установленные для чебышевских систем функций.

1. Конические оболочки кривых

Пусть на отрезке $[a, b]$ дана система непрерывных линейно независимых на $[a, b]$ функций $u_i(t)$, $i = \overline{0, n}$.

Обозначим через U кривую

$$U = \big\{\overline{u}(t) = (u_0(t), \ldots, u_n(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} : a \leqslant t \leqslant b\big\}.$$

Обобщенным многочленом по данной системе $\{u_i(t)\}_{i=0}^n$ будем называть функцию

$$u(t) = (\alpha, \overline{u}(t)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i(t),$$

где $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{u}(t) = (u_0(t), \ldots, u_n(t))$, $(\alpha, \overline{u}(t))$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$ векторов α и $\overline{u}(t)$.

Отметим, что из линейной независимости системы функций $\{u_i(t)\}_{i=0}^n$ следует, что кривая U не умещается ни в одной гиперплоскости (размерности n).

Обозначим через $\overline{\mathrm{conv}}\, U$ замкнутую выпуклую оболочку этой кривой — наименьшее (по включению) замкнутое выпуклое множество пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащее кривую U. Известно (см. [1, с. 217]), что замкнутая выпуклая оболочка совпадает с замыканием выпуклой оболочки:

$$\overline{\mathrm{conv}}\, U = \overline{\mathrm{conv}\, U}.$$

Отметим, что в силу линейной независимости системы функций $\{u_i(t)\}_{i=0}^{n}$, внутренность $\mathrm{int}\,(\overline{\mathrm{conv}}\, U)$ не пустая.

Обозначим через $K(U)$ замкнутую выпуклую коническую оболочку кривой U, т. е. пересечение всех замкнутых выпуклых конусов, содержащих кривую U.

Отметим, что замкнутый конус содержит нуль пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Возможны три случая.

1) $0 \in \mathrm{int}\,(\overline{\mathrm{conv}}\, U)$. В этом случае $R(U)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^{n+1}$. Геометрически это означает, что кривая U рассекается любой гиперплоскостью, проходящей через нуль, т. е. для любой точки $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha \neq 0$, имеем, что обобщенный многочлен

$$(\alpha, \overline{u}(t)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i(t)$$

меняет знак на отрезке $[a, b]$, т. е. имеются точки кривой $\overline{u}(t) \in U$, лежащие как по одну сторону от гиперплоскости, так и по другую.

2) $0 \in \partial(\overline{\mathrm{conv}}\, U)$, где ∂ означает границу множества. Тогда через нуль можно провести опорную гиперплоскость к $\overline{\mathrm{conv}}\, U$, и тогда $K(U)$ также лежит по одну сторону от этой гиперплоскости. Относительно обобщенных многочленов этот случай означает, что существует точка $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha \neq 0$, такая, что обобщенный многочлен

$$(\alpha, \overline{u}(t)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i(t)$$

неотрицателен на $[a, b]$, т. е. во втором случае существуют нетривиальные неотрицательные обобщенные многочлены, но нет строго положительного.

3) $0 \notin \overline{\mathrm{conv}}\, U$. В этом случае точку и множество можно отделить строго, т. е. существует $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha \neq 0$, такая, что обобщенный многочлен

$$(\alpha, \overline{u}(t)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i(t)$$

строго положителен на $[a, b]$.

Отметим, что чебышевские системы функций (см. [2]) имеют строго положительные обобщенные многочлены.

В дальнейшем мы будем рассматривать именно третий случай, когда имеются строго положительные обобщенные многочлены. Отметим, что в этом случае

$$K(U) = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} (\lambda \,\overline{\mathrm{conv}}\, U).$$

Таким образом, $K(U)$, являющаяся по определению замкнутой выпуклой конической оболочкой, могла быть определена просто как выпуклая коническая оболочка, т. е. как пересечение всех выпуклых конусов, содержащих кривую U, а замкнутость ее получается автоматически.

Для конуса $K(U)$, как выпуклой конической оболочки кривой U, из теоремы Каратеодори (см. [2, с. 211]) следует, что любая точка $c \in K(U)$ допускает представление в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами не более чем $n+1$ точек кривой U.

Напомним, что сопряженным (или двойственным, или дуальным) конусом к конусу $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется множество

$$K^* = \bigl\{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \forall x \in K \ (\alpha, x) \geqslant 0\bigr\},$$

где, как и выше, (α, x) означает скалярное произведение элементов $\alpha, x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Нетрудно показать, что K^* — выпуклый замкнутый конус, а также (при условии, что K — выпуклый замкнутый конус) имеет место равенство $K^{**} = K$ (см. [1]).

Для конуса $K(U)$ отметим, что $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in K^*(U)$ тогда и только тогда, когда $(\alpha, \overline{u}(t)) \geqslant 0$ для любого $t \in [a, b]$.

Действительно, $\alpha \in K^*(U)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in K(U)$ имеем $(d, x) \geqslant 0$. Так как $U \subset K(U)$, то

$$(\alpha, \overline{u}(t)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i(t) \geqslant 0, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

С другой стороны, если $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что $(\alpha, \overline{u}(t)) \geqslant 0$ для любого $t \in [a, b]$, то $\alpha \in K^*(U)$. Действительно, для любого $x \in K(U)$ существуют $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \geqslant 0$ и $\overline{u}(t_j) \in U$, где $t_j \in [a, b]$, $j = \overline{1, k}$, такие, что

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overline{u}(t_j).$$

Тогда имеем

$$(\alpha, x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\alpha, \overline{u}(t_j)) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{n} \lambda_j \alpha_i u_i(t_j) \geqslant 0.$$

Таким образом, координаты точек сопряженного конуса это не что иное, как коэффициенты отрицательных обобщенных многочленов.

Сопряженный конус имеет другую интерпретацию в смысле сечений $K(U)$. Под сечением S имеется в виду любое такое подмножество конуса $K(U)$, которое является ограниченным, замкнутым и выпуклым и получается как пересечение конуса $K(U)$ некоторой гиперплоскостью. При этом сечение получается тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathrm{int}\,(K^*(U))$.

Отметим также, что $\alpha \in \operatorname{int}(K^*(U))$ тогда и только тогда, когда α_i, $i = \overline{0, n}$, являются коэффициентами строго положительного обобщенного многочлена, т. е.

$$(\alpha, \overline{u}(t)) > 0, \quad \text{где} \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Кроме того, для любого сечения S конуса $K(U)$ и для любого $x \in K(U)$ существует $\lambda > 0$ такое, что $\lambda x \in S$.

Обозначим через Σ множество функций ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, а через $\Sigma^{(+)}$ и $\Sigma^{(-)}$ подмножества Σ, состоящие из соответственно неубывающих и невозрастающих функций ограниченной вариации.

Определим моментное пространство

$$\mathcal{M}_{n+1} = \Big\{ c \in \mathbb{R}^{n+1} : c = \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma(t),\ \sigma(t) \in \Sigma^{(+)} \Big\}.$$

Здесь

$$\int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma(t) = \Big(\int_a^b u_0(t)\, d\sigma(t), \ldots, \int_a^b u_n(t)\, d\sigma(t) \Big),$$

а величина

$$c_i = \int_a^b u_i(t)\, d\sigma(t)$$

называется i-м моментом; интегралы — интегралы Стилтьеса.

Теорема 1. *Если система $\{u_i(t)\}_{i=0}^n$ состоит из линейно независимых функций и существует обобщенный многочлен по этой системе, который строго положителен, то $\mathcal{M}_{n+1}$ является выпуклым замкнутым конусом в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{M}_{n+1}$ — конус. Пусть $c \in \mathcal{M}_{n+1}$ и $\lambda > 0$. Имеем, что существует $\sigma \in \Sigma^{(+)}$ такая, что

$$c = \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma(t).$$

Покажем, что $C_\lambda = \lambda c$ принадлежит $\mathcal{M}_{n+1}$. Действительно,

$$c_\lambda = \lambda c = \lambda \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma(t) = \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma_\lambda(t),$$

где $\sigma_\lambda(t) = \lambda \sigma(t) \in \Sigma^{(+)}$. Таким образом, $\mathcal{M}_{n+1}$ — конус.

Для того чтобы показать, что $\mathcal{M}_{n+1}$ — выпуклый конус, надо установить, что для любых c_1, c_2 из $\mathcal{M}_{n+1}$ вектор $c = c_1 + c_2$ принадлежит $\mathcal{M}_{n+1}$. Действительно, если $c_1, c_2 \in \mathcal{M}_{n+1}$, то существуют $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma^{(+)}$ такие, что

$$c_i = \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Далее имеем

$$c = c_1 + c_2 = \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma_1(t) + \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma_2(t) = \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma(t),$$

где $\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t) \in \Sigma^{(+)}$.

Покажем теперь, что $\mathcal{M}_{n+1}$ является замкнутым выпуклым конусом.

Пусть имеется последовательность $c_r \in \mathcal{M}_{n+1}$, $r = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{r\to\infty} c_r = c$. По определению существуют $\sigma_r \in \Sigma^{(+)}$, такие, что

$$c_r = \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma_r(t).$$

Надо показать, что $c \in \mathcal{M}_{n+1}$.

Без ограничения общности будем полагать, что $\sigma_r(a) = 0$, $r = 1, 2, \ldots$.

По условиям теоремы существует положительный обобщенный многочлен

$$u(t) = (\alpha, \overline{u}(t)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i(t).$$

Пусть $m = \min\limits_{a\leqslant t\leqslant b} u(t) > 0$. Из сходимости последовательности c_r следует ее ограниченность, т. е. существует $M > 0$ такое, что $||c_r|| < M$ (где норма вектора понимается в евклидовом смысле). Тогда

$$M \cdot ||\alpha|| \geqslant (\alpha, c_r) = \Big(\alpha, \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma_r(t)\Big) = \int_a^b (\alpha, \overline{u}(t))\, d\sigma_r(t) =$$
$$= \int_a^b u(t)\, d\sigma_r(t) \geqslant m \int_a^b d\sigma_r(t).$$

Таким образом, функции $\sigma_r(t)$, $r = 1, 2, \ldots$, имеют равномерно ограниченную вариацию, а также сами в совокупности равномерно ограничены. Тогда по теоремам Хелли о выборе и предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса (см. [3]) получаем, что существует подпоследовательность $\sigma_{r_p}(t)$ последовательности $\sigma_r(t)$ и существует $\sigma(t) \in \Sigma^{(+)}$ такие, что $\sigma_{r_p}(t)$ сходится к $\sigma(t)$ в каждой точке $t \in [a, b]$. Поэтому

$$c = \lim_{p\to\infty} c_{r_p} = \lim_{p\to\infty} \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma_{r_p}(t) = \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma(t).$$

Таким образом, $c \in \mathcal{M}_{n+1}$, и теорема доказана.

Имеет место основная теорема о конической оболочке и моментном пространстве.

Теорема 2. *В предположениях предыдущей теоремы относительно системы функций $\{u)i(t)\}_{i=0}^n$ верно, что $K(U) = \mathcal{M}_{n+1}$.*

Доказательство. Отметим, что $K(U)$ и $\mathcal{M}_{n+1}$ — выпуклые замкнутые конусы в $\mathbb{R}^{n+1}$. Далее, по определению $U \subset K(U)$. Очевидно также, что любая точка $\overline{u}(t^*) \in \mathcal{M}_{n+1}$, где $a \leqslant t^* \leqslant b$. Действительно, положим:
при $a < t^* < b$

$$\sigma_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } a \leqslant t < t^*, \\ 1, & \text{при } t^* \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

если $t^* = a$, то

$$\sigma_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t = a, \\ 1, & \text{при } a < t \leqslant b, \end{cases}$$

если $t^* = b$, то

$$\sigma_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } a \leqslant t < b, \\ 1, & \text{при } t = b. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma_*(t) = \overline{u}(t^*) \in \mathcal{M}_{n+1}.$$

Итак, $U \subset \mathcal{M}_{n+1}$, $\mathcal{M}_{n+1}$ является выпуклым замкнутым конусом, а $K(U)$ является наименьшим выпуклым замкнутым конусом, содержащим U. Поэтому $K(U) \subseteq \mathcal{M}_{n+1}$

Покажем, что $K(U) = \mathcal{M}_{n+1}$. Предположим, что это не так, т. е. существует $c \in \mathcal{M}_{n+1}$ такая, что $c \notin K(U)$. Поскольку $K(U)$ — замкнутое выпуклое множество и точка c ему не принадлежит, то их можно строго отделить, т. е. существует $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha \neq 0$, такая, что

$$(\alpha, c) > (\alpha, x) \quad \forall x \in K(U). \tag{1}$$

В частности, при x равном нулю (так как $0 \in K(U)$) имеем

$$(\alpha, c) > 0. \tag{2}$$

С другой стороны, при $t \in [a, b]$ и любом $\lambda > 0$ имеем, что $\lambda\overline{u}(t) \in K(U)$, и поэтому

$$(\alpha, \lambda\overline{u}(t)) < (\alpha, c).$$

Далее, при λ, стремящемся к бесконечности, в силу ограниченности правой части последнего неравенства получаем

$$(\alpha, \overline{u}(t)) \leqslant 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$(\alpha, c) = (\alpha, \int_a^b \overline{u}(t)\, d\sigma(t)) = \int_a^b (\alpha, \overline{u}(t))\, d\sigma(t) \leqslant 0,$$

что противоречит (2). Значит, не только $K(U) \subseteq \mathcal{M}_{n+1}$, но и $K(U) = \mathcal{M}_{n+1}$. Теорема доказана.

Из полученного описания $K(U)$ и теоремы Каратеодори (см. [1]) получаем

Следствие. *Для любой $c \in \mathcal{M}_{n+1}, c \neq 0$, существуют $\lambda_i > 0$ $(i = \overline{1, r})$ и t_i $(i = \overline{1, r})$ $a \leqslant t_1 < \cdots < t_r \leqslant b$, такие, что*

$$c = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{u}(t_i), \tag{3}$$

где $r \leqslant n + 1$.

Замечание. Более детальный анализ показывает, что оценку для числа r в следствии можно заменить другой, в некоторых случаях более точной. Представление (3), вообще говоря, не единственно.

Библиографический список

1. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. *Кармин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
3. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. 3-е изд. М.: Наука, 1974.