Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2004 С. 100 – 103

Д. Н. Азаров

О ГРУППАХ КОНЕЧНОГО ОБЩЕГО РАНГА

Доказано, что если G — финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга, то финитно аппроксимируемыми являются группа автоморфизмов группы G и расщепляемое расширение группы G с помощью произвольной финитно аппроксимируемой группы. Тем самым получены обобщения соответствующих теорем Смирнова — Баумслага и Мальцева о конечно порожденных группах.

It is proved that if G is a residually finite group of finite general rank then the automorphism group of G and the split extension of G by a residually finite group are residually finite. These results extend corresponding theorems of Smirnov — Baumslag and Mal'cev on finitely generated groups.

УДК 512.543.

1. Введение

Хорошо известно, что расщепляемое расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы с помощью финитно аппроксимируемой группы само является финитно аппроксимируемой группой. Эта теорема была доказана А. И. Мальцевым [2] на основе одного достаточно тонкого результата Б. Неймана о вербальных подгруппах конечно порожденных групп. Д. И. Молдаванский заметил, что в доказательстве теоремы Мальцева можно вместо результата Неймана использовать более элементарную теорему М. Холла, утверждающую, что конечно порожденная группа может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса. Это простое свойство конечно порожденных групп может быть использовано и при доказательстве теоремы Смирнова — Баумслага [4, 5], которая утверждает финитную аппроксимируемость группы автоморфизмов произвольной конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы.

Простые примеры показывают, что условие конечной порожденности группы является существенным как в теореме Мальцева, так и в теореме Смирнова — Баумслага. Ослабляя это условие до требования конечности общего ранга группы, мы обобщаем здесь вышеупомянутый результат Холла и на этой основе получаем соответствующие обобщения теорем Мальцева и Смирнова — Баумслага.

Напомним (см. [3]), что группа G имеет конечный общий ранг r, если r является наименьшим числом с тем свойством, что всякое конечное множество элементов из G содержится в некоторой подгруппе, обладающей не более чем r образующими. Очевидно, что произвольная конечно порожденная группа имеет конечный общий ранг. С другой стороны, существуют группы конечного общего ранга, которые не имеют конечной системы порождающих и при этом являются финитно аппроксимируемыми; примеры таких групп можно обнаружить уже среди локально циклических групп.

В п. 2 мы доказываем следующую теорему, обобщающую вышеупомянутый результат М. Холла.

Теорема 1. *Группа конечного общего ранга может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса.*

Пусть G — группа конечного общего ранга и пусть N обозначает пересечение всех подгрупп фиксированного конечного индекса s группы G. По теореме 1 число таких подгрупп конечно, и потому N — подгруппа конечного индекса. Поскольку N является, очевидно, характеристической подгруппой группы G, получаем

Следствие. *Пусть G — группа конечного общего ранга. Тогда в любой ее подгруппе конечного индекса содержится некоторая характеристическая подгруппа группы G, также имеющая в группе G конечный индекс.*

Именно это следствие из теоремы 1 используется в доказательстве в п. 3 следующего результата, обобщающего теоремы Мальцева и Смирнова — Баумслага.

Теорема 2. *Для произвольной финитно аппроксимируемой группы G конечного общего ранга имеют место следующие утверждения:*

(1) *группа автоморфизмов группы G финитно аппроксимируема;*

(2) *любое расщепляемое расширение группы G с помощью финитно аппроксимируемой группы само является финитно аппроксимируемой группой;*

(3) *голоморф группы G является финитно аппроксимируемой группой.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть A — произвольная группа, s — целое положительное число. Через $n(A, s)$ будем обозначать число всех подгрупп группы A индекса s, а через $N(A, s)$ — число всех подгрупп группы A, индекс которых не превосходит числа s.

Пусть H — конечно порожденная группа с не более чем r образующими. Тогда число $n(H, s)$ конечно и

$$n(H, s) \leqslant (s!)^r$$

(см., напр. [1, с. 250]). Поэтому

$$N(H, s) \leqslant f(r, s), \tag{1}$$

где

$$f(r, s) = \sum_{k=1}^{s} (k!)^r.$$

Пусть G — группа конечного общего ранга r. Покажем, что число $n(G,s)$ конечно и не превосходит $f(r,s)$. Допустим противное. Тогда в G существуют попарно различные подгруппы G_1, G_2, … , G_m индекса s, где $m > f(r,s)$. Так как все подгруппы G_i имеют в группе G один и тот же конечный индекс s, то для любых различных $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ подгруппа G_i не содержится в G_j, и поэтому можно зафиксировать элемент

$$a_{ij} \in G_i \setminus G_j. \tag{2}$$

Поскольку общий ранг группы G равен r, то в G существует подгруппа H с не более чем r образующими, содержащая все элементы a_{ij}. Тогда для H выполняется неравенство (1). С другой стороны, из (2) следует, что подгруппы H_1, H_2, … , H_m, высекаемые в H подгруппами

G_1, G_2, … , G_m, попарно различны. Кроме того, для каждого $i = 1, \ldots, m$

$$[H : H_i] \leqslant [G : G_i] = s.$$

Поэтому

$$N(H,s) \geqslant m > f(r,s),$$

что противоречит неравенству (1). Таким образом, число $n(G,s)$ конечно и не превосходит $f(r,s)$.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга. Тогда пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G является единичной подгруппой. Поэтому в силу указанного выше следствия из теоремы 1 пересечение всех характеристических подгрупп конечного индекса группы G является единичной подгруппой, т. е. для каждого неединичного элемента a группы G существует характеристическая подгруппа N конечного индекса этой группы G, не содержащая элемента a.

1. Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ и $\varphi \neq 1$. Тогда $a^{-1}(a\varphi) \neq 1$ для некоторого элемента $a \in G$. Пусть N — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G, не содержащая элемента $a^{-1}(a\varphi)$. Характеристичность подгруппы N позволяет рассмотреть гомоморфизм

$$\alpha : \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} G/N,$$

сопоставляющий каждому автоморфизму σ группы G автоморфизм $\overline{\sigma}$ группы G/N, действующий по правилу

$$(xN)\overline{\sigma} = (x\sigma)N.$$

Так как $a^{-1}(a\varphi) \notin N$, то

$$aN \neq (a\varphi)N,$$

т. е. $aN \neq (aN)\overline{\varphi}$. Поэтому $\overline{\varphi} \neq 1$. Таким образом, α — гомоморфизм группы $\operatorname{Aut} G$ в конечную группу $\operatorname{Aut} G/N$, переводящий φ в неединичный элемент $\overline{\varphi}$. Поэтому группа $\operatorname{Aut} G$ финитно аппроксимируема.

2. Пусть P — расщепляемое расширение группы G с помощью финитно аппроксимируемой группы F. Для доказательства финитной аппроксимируемости группы P достаточно для каждого элемента $a \in P\backslash\{1\}$ указать нормальную подгруппу N группы P, не содержащую a и такую, что группа P/N финитно аппроксимируема. Если $a \in P\backslash G$, то в качестве N можно взять G (поскольку группа $P/G \simeq F$ финитно аппроксимируема). Если же $a \in G \setminus \{1\}$, то в группе G существует характеристическая подгруппа N конечного индекса, не содержащая элемент a. Так как N характеристична в G и G нормальна в P, то N нормальна в P. Поэтому нам остается доказать финитную аппроксимируемость группы P/N. Эта группа является расщепляемым расширением конечной группы G/N с помощью группы FN/N, изоморфной группе F, и потому финитная аппроксимируемость группы P/N вытекает из теоремы Мальцева.

3. Финитная аппроксимируемость голоморфа группы G непосредственно следует из доказанных утверждений (1) и (2) теоремы 2.

Библиографический список

1. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
2. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. № 5. С. 49—60.
3. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22. № 2. С. 351—352.
4. *Смирнов Д. М.* К теории финитно аппроксимируемых групп // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15. С. 453—457.
5. *Baumslag G.* Automorphism groups of residually finite groups // J. London Math. Soc. 1963. Vol. 38. P. 117—118.