Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2004 С. 103 – 108

Е. П. Барановский

РЕШЁТКИ, ОБЛАДАЮЩИЕ РЕПЕРОМ ЗЕЛЛИНГА, СОСТОЯЩИМ ИЗ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ

В n-мерном евклидовом пространстве рассмотрены общие свойства точечных решёток, обладающих репером Зеллинга, составленным из векторов минимальной для данной решётки длины; такие решётки названы z-совершенными. В пространстве параметров Зеллинга n-мерных решёток исследованы области, соответствующие z-совершенным решёткам.

A lattice is called z-perfect if one of its Selling frames consist of only vectors of minimal length. In this note it is considered some common propeties of z-perfect lattices.

УДК 512.543.

1. Введение. Определения

Пусть $\Gamma^n(\mathcal{E})$ — n-мерная решётка в n-мерном евклидовом пространстве E^n, заданная репером $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n)$. И пусть

$$f(\mathcal{E}) = f(x^1, ..., x^n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j \tag{1}$$

— метрическая форма репера $\mathcal{E}$, т. е. положительная квадратичная форма (ПКФ), задающая решётку $\Gamma^n(\mathcal{E})$ с точностью до положения в пространстве. Представлениям арифметического минимума формы (1) соответствуют координатные строки векторов решётки минимальной длины — *минимальных векторов*, или *M-векторов.*

Репером Зеллинга $Z = Z(\Gamma^n(\mathcal{E})) = \{\bar{e}_0, \bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$ решётки $\Gamma^n(\mathcal{E})$ называется какой-либо из задающих (т. е. *основных*) её реперов, к которому добавлен вектор $\bar{e}_0 = -\sum_{i=1}^{n} \bar{e}_i$ [4, с. 28]. *Параметрами Зеллинга* решётки $\Gamma^n(\mathcal{E})$ (а также реперов Z и $\mathcal{E}$) называются скалярные произведения

$$g_{kl} = \bar{e}_k \bar{e}_l, \quad k, l = 0, 1, ..., n; k \neq l.$$

Задание решётки параметрами Зеллинга эквивалентно заданию её коэффициентами ПКФ (1); это вытекает из соотношений:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= g_{ij}, \;\; i \neq j, \;\; i, j = 1, ..., n; \\ a_{ii} &= -\sum_{0 \leqslant k \leqslant n; k \neq i} g_{ik}, \quad i = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-0010).

Квадратичной длиной репера Z называется сумма

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n} \bar{e}_k^2 = -2 \sum_{0 \leqslant k < l \leqslant n} g_{kl}.$$

Репер Зеллинга Z (как и репер $\mathcal{E}$, по которому построен репер Зеллинга) называется *приведённым по Зеллингу*, если его квадратичная длина минимальна на множестве квадратичных длин реперов Зеллинга, соответствующих множеству основных реперов решётки.

Когда решётка рассматривается заданной репером Зеллинга Z, то, наряду с обычными аффинными координатами $(x^1, ..., x^n)$ (x-координатами) относительно репера $\mathcal{E}$ как базиса, бывает удобно пользоваться z-координатами $\{z^0, z^1, ..., z^n\}$ [1, 2], связанными с x-координатами формулами:

$$\begin{aligned} z^0 &= \max\{0, |x^{j_1}|, ..., |x^{j_m}|\}, \\ z^i &= x^i + z^0, \qquad i = 1, 2, ..., n, \end{aligned}$$

где $x^{j_1}, ..., x^{j_m}$ — отрицательные координаты строки $(x^1, ..., x^n)$. Условимся писать: $\bar{x} = (x^1, ..., x^n) = \{z^0, z^1, ..., z^n\}$.

Заметим, что если вектор $\bar{x} = \{z^0, z^1, ..., z^n\}$, то вектор

$$-\bar{x} = \{q - z^0, q - z^1, ..., q - z^n\},$$

где $q = \max(z^0, z^1, ..., z^n)$.

В z-координатах для квадратичной формы (1) получаем выражение:

$$f(x^1, ..., x^n) = f\{z^0, ..., z^n\} = (\sum_{k=0}^{n} z^k \bar{e}_k)^2 = \\ = - \sum_{0 \leqslant k < l \leqslant n} g_{kl}(z^k - z^l)^2. \tag{3}$$

Определение 1. *Репер Зеллинга называется z-совершенным, если он состоит из минимальных векторов построенной на нём решётки.*

Очевидно, что z-совершенный репер является приведённым по Зеллингу репером той решётки, которую он определяет. Если M — длина минимального вектора решётки, построенной на репере Z, то необходимыми и достаточными условиями того, чтобы репер был z-совершенным, является выполнение $n + 1$ равенства:

$$|\bar{e}_0| = |\bar{e}_1| = ... = |\bar{e}_n| = M. \tag{4}$$

Воспользовавшись тем, что для каждого вектора z-совершенного репера выполнено условие

$$\bar{e}_k^2 = (- \sum_{l=0}^{n;l \neq k} \bar{e}_l)^2 = nM^2 + 2 \sum_{0 \leqslant p < q \leqslant n} g_{pq} = M^2,$$

где $p \neq k, q \neq k,\ k = 0, 1, ..., n$, выводим следующие соотношения для параметров Зеллинга z-совершенного репера Z:

$$\sum_{0 \leqslant p < q \leqslant n} g_{pq} = -\frac{M^2}{2}(n-1), \qquad p, q = 0, 1, ..., n; p \neq q. \tag{5}$$

С другой стороны, из равенств (2) имеем:

$$-\sum_{0 \leqslant k \leqslant n; k \neq l} g_{kl} = M^2, \quad l = 0, 1, ..., n. \tag{6}$$

Очевидно, система уравнений (6), которым удовлетворяют параметры Зеллинга, задаёт необходимые и достаточные условия того, что репер Зеллинга является z-совершенным.

Определение 2. *Решётка называется z-совершенной, если она обладает z-совершенным репером Зеллинга.*

Интерес автора к z-совершенным решёткам был в основном вызван тем, что, как оказалось, совершенные решётки, по крайней мере в пространствах размерностей $n \leqslant 6$, являются и z-совершенными [3]. В настоящей статье рассмотрены некоторые общие свойства z-совершенных решёток.

2. z-совершенные решётки в пространствах E^2 и E^3. z-совершенность первой совершенной решётки Вороного и взаимной ей решётки

Первую совершенную решётку Γ_0^n будем, как обычно, рассматривать заданной ПКФ

$$\phi_0^n = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^i x^j. \tag{7}$$

Взаимная её решётка Γ_0^{n*} может быть задана ПКФ

$$\phi_0^{n*} = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 - \frac{2}{n} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^i x^j. \tag{8}$$

(Для первой совершенной решётки (и формы) и взаимной ей приняты также обозначения соответственно A_n и A_n^* [5].)

Не нарушая общности, примем всюду ниже для z-совершенных реперов $M = 1$.

Предложение 1. *При любом значении $n \geqslant 2$ для параметров Зеллинга z-совершенного репера справедливы неравенства*

$$-\frac{1}{2} \leqslant g_{kl} \leqslant \frac{1}{2}, \ \ k, l = 0, 1, ..., n; k \neq l. \tag{9}$$

$\triangleright$ Так как $M = 1$, то должны выполняться неравенства $|\bar{e}_k - \bar{e}_l| \geqslant 1$, $|\bar{e}_k + \bar{e}_l| \geqslant 1$, откуда и следуют неравенства (9).$\bullet$

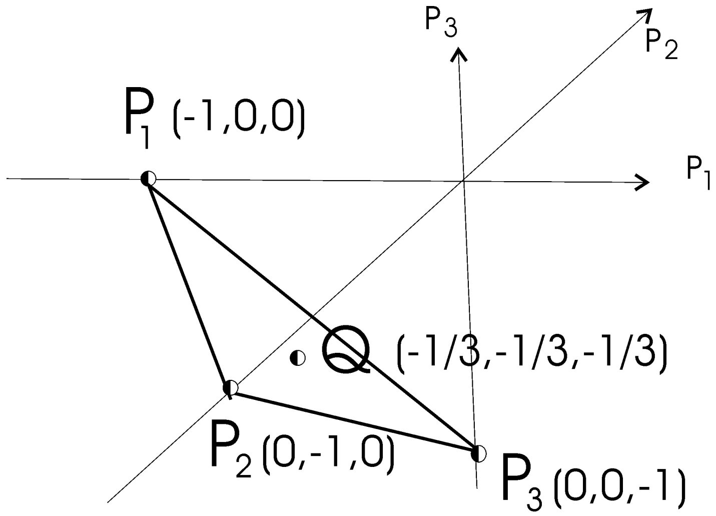
Предложение 2. *При $n = 2$ имеется единственная z-совершенная решётка — это решётка $\Gamma_0^2 = \Gamma_0^{2*}$. Её приведённый по Зеллингу репер имеет параметры $g_{01} = g_{02} = g_{12} = -\frac{1}{2}$.*

$\triangleright$ При $n = 2$ система (6) при заданном значении $M = 1$ даёт единственные значения параметров Зеллинга приведённого по Зеллингу z-совершенного репера. Эти параметры определяют совершенную решётку Γ_0^2, совпадающую со своей взаимной.$\bullet$

Предложение 3. *При $n = 3$ множеству z-совершенных реперов в пространстве параметров Зеллинга 3-мерных решёток $R^6 = \{g_{01}, ..., q_{23}\}$ соответствует 2-мерная область в плоскости*

$$g_{01} = g_{23}, \;\; g_{02} = g_{13}, \;\; g_{03} = g_{12}, \; \sum_{0 \leqslant k < l \leqslant 3} g_{kl} = -2. \tag{10}$$

Эта область имеет форму треугольника, изображённого на рисунке.



$\triangleright$ Выписав 4 уравнения, образующие при $n = 3$ систему (6), выводим из них эквивалентную (6) систему (10). Введя обозначения

$$g_{01} = g_{23} = p_1, \;\; g_{02} = g_{13} = p_2, \;\; g_{03} = g_{12} = p_3,$$

имеем $p_1 + p_2 + p_3 = -1$ и, согласно предложению 1, $|p_t| \leqslant \frac{1}{2}$, $t = 1, 2, 3$. Отсюда и получаем сказанное в предложении 3.$\bullet$

Из предложения 3 и рисунка вытекает

Следствие. *Вершины P_1, P_2, P_3 треугольника на рисунке соответствуют z-совершенным реперам, определяющим решётку Γ_0^3, а центр треугольника Q — z-совершенному реперу решётки Γ_0^{3*}.*

Таким образом, в 3-мерном пространстве решётки Γ_0^3 и Γ_0^{3*} являются z-совершенными.

Предложение 4. *Первая совершенная решётка* Γ_0^n *и взаимная ей* Γ_n^{n*} *при любой размерности* n *являются* z*-совершенными.*

▷ Параметры Зеллинга, соответствующие ПКФ (8), а именно $g_{kl} = -\frac{1}{n}$, $0 \leqslant k < l \leqslant n$, удовлетворяют условиям (6), и, следовательно, решётка Γ_0^{n*} является z-совершенной, а ПКФ (8) соответствует z-совершенному реперу.

Репер Зеллинга с параметрами $g_{01} = g_{12} = ... = g_{n-1,n} = g_{n0} = -\frac{1}{2}$ и остальными параметрами, равными 0, задаёт решётку, у которой длина минимального вектора равна 1, а его параметры удовлетворяют условиям (8). Таким образом, этот репер является z-совершенным, как и определяемая им решётка. Легко убедиться в том, что эта решётка — первая совершенная решётка Γ_0^n.

Действительно, названному реперу Зеллинга соответствует положительная квадратичная форма

$$\psi^n = \sum_{i=1}^{n}(y^i)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} y^i y^{i+1}. \tag{11}$$

Замена

$$x^1 = y^1 - y^2, x^2 = y^2 - y^3, ..., x^{n-1} = y^{n-1} - y^n, x^n = y^n$$

показывает, что ПКФ (11) и (7) эквивалентны.●

Соотношения (6) определяют в пространстве параметров Зеллинга n-мерных решёток

$$R^N = \{g_{01}, ..., g_{n-1,n}\}, \quad N = \frac{1}{2}n(n+1)$$

область z-совершенных решёток Ω_n — замкнутый ограниченный многогранник в плоскости размерности $N - n - 1$. Область Ω_n расположена в единичном кубе

$$-\frac{1}{2} \leqslant g_{kl} \leqslant \frac{1}{2}$$

и образована пересечением куба с $n+1$ гиперплоскостью

$$\begin{aligned} &g_{01} + g_{02} + \cdots + g_{0n} &&= -1,\\ &g_{01} + g_{12} + \cdots + g_{1n} &&= -1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &g_{0n} + g_{1n} + \cdots + g_{n-1,n} &&= -1. \end{aligned}$$

Библиографический список

1. *Барановский Е. П.* К приведению положительных квадратичных форм от пяти переменных по Зеллингу // Учен. зап. Иван. ун-та. 1974. Т. 89. С. 37—64.
2. *Барановский Е. П.* Область приведения по Зеллингу положительных квадратичных форм от пяти переменных // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 152. С. 5—33.

3. *Барановский Е. П.* Совершенные решётки, заданные реперами, приведёнными по Зеллингу, и z-совершенность // Математика и её приложения. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2004. № 1. С. 25—36.
4. *Делоне Б. Н.* Геометрия положительных квадратичных форм // Успехи мат. наук. 1937. Вып. 3. С. 16—62.
5. *Coxeter H. S. M.* Extreme forms // CJM. 1951. Vol. 3. P. 391—441.