Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2004 С. 109 – 119

А. С. Белов

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ (ОГРАНИЧЕННОСТИ) В СРЕДНЕМ ЧАСТНЫХ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Получены новые достаточные условия на коэффициенты тригонометрического ряда Фурье, из которых вытекает сходимость (ограниченность) в среднем частных сумм этого ряда и которые неулучшаемы в некотором смысле.

A new sufficient conditions in terms of the coefficients of trigonometric Fourier series are obtained for convergence (boundedness) in mean of the partial sums of this series that are best possible in some sense.

УДК 517.5.

§ 1. Введение

Для функции $f \in L_{2\pi}$ будем, как обычно, обозначать

$$\|f\|_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx\,.$$

В статье [1] автором были введены следующие определения.

Последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ называется LC (соответственно LB) – последовательностью, и кратко это записывается в виде

$$\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathrm{LC} \quad (\text{соответственно } \in \mathrm{LB})\,, \tag{1}$$

если

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} k(c_k\, e^{ikx} + c_{-k}\, e^{-ikx}) \Big\|_L = o(n) \quad (\text{соответственно } = O(n)\,).$$

Здесь и в аналогичных соотношениях далее, конечно, предполагается, что n стремится к бесконечности.

Последовательность $\{c_n\}_{n=m}^{\infty} \in \mathrm{LC}$ (соответственно $\in \mathrm{LB}$), если, полагая $c_n = 0$ при всех $n < m$, получим последовательность, удовлетворяющую условию (1). Отметим (см. [1]), что условие (1) эквивалентно условию, что последовательности

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\,,\ \{c_{-n}\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{LC} \quad (\text{соответственно } \in \mathrm{LB}). \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00315).

Заметим также (см. [1]), что условие

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{LC} \quad (\text{соответственно } \in \mathrm{LB}) \tag{3}$$

эквивалентно условию, что последовательности

$$\{\operatorname{Re} c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\operatorname{Im} c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{LC} \quad (\text{соответственно } \in \mathrm{LB})$$

и также эквивалентно условию

$$\max_{m=2^n,\ \dots,2^{n+1}} \Big\| \sum_{k=2^n+1}^{m} c_k\, e^{ikx} \Big\|_L = o(1) \quad (\text{соответственно } = O(1)\,). \tag{4}$$

Поясним важность введенных понятий. Известно, что частные суммы тригонометрического ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx} \tag{5}$$

сходятся (ограничены) в метрике L тогда и только тогда, когда он является рядом Фурье (соответственно рядом Фурье — Стильтьеса) и последовательность его коэффициентов $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ образует LC (соответственно LB) – последовательность. Эквивалентность условий (1) и (2) показывает важность изучения условия (3).

Будем так же, как обычно, обозначать $\Delta c_k = c_k - c_{k+1}$. Цель этой статьи состоит в подробном доказательстве следующих двух теорем.

Теорема 1. *Пусть для последовательности комплексных чисел* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существуют числа* $p > 1$ *и* $C > 0$ *такие, что*

$$2^{n(p-1)} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |\Delta c_k|^p \leqslant C\, n^p \qquad \text{при всех} \ \ n \geqslant 1\,. \tag{6}$$

Тогда условие (3) *эквивалентно условию*

$$c_n \ln n = o(1) \quad (\text{соответственно } = O(1)\,). \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть для последовательности комплексных чисел* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существуют числа* $p > 2$, $\theta > 0$ *и* $C > 0$ *такие, что*

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |\Delta c_k| \Big(\ln^+\Big(\theta\, \frac{2^n}{n}\, |\Delta c_k|\Big) \Big)^p \leqslant C\, n \qquad \text{при всех} \ \ n \geqslant 1\,. \tag{8}$$

Тогда условие (3) *эквивалентно условию* (7) .

Здесь, как обычно, обозначаем

$$\ln^+ x = \begin{cases} \ln x & \text{при } x \geqslant 1\,, \\ 0 & \text{при } x < 1\,. \end{cases}$$

Отметим (см. [1, замечание 1]), что для каждого натурального m условие (3) эквивалентно условию

$$(\,\forall j = 0,\ \dots, m-1\,) \ \ \{c_{mk+j}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathrm{LC} \quad (\text{соответственно } \in \mathrm{LB}).$$

Поэтому из теорем 1 и 2 немедленно вытекают следующие несколько более общие теоремы.

Теорема 3. *Пусть для последовательности комплексных чисел* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существуют натуральное число* m *и числа* $p>1$ *и* $C>0$ *такие, что*

$$2^{n(p-1)} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |c_k - c_{k+m}|^p \leqslant C\, n^p \qquad \textit{при всех} \ \ n \geqslant 1\,.$$

Тогда условия (3) *и* (7) *эквивалентны.*

Теорема 4. *Пусть для последовательности комплексных чисел* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существуют натуральное число* m *и числа* $p>2$, $\theta>0$ *и* $C>0$ *такие, что*

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |c_k - c_{k+m}| \left(\ln^+\Bigl(\theta\,\frac{2^n}{n}\,|c_k - c_{k+m}|\Bigr)\right)^p \leqslant C\, n \qquad \textit{при всех} \ \ n \geqslant 1\,.$$

Тогда условие (3) *эквивалентно условию* (7).

Вывод теорем 3 и 4 из теорем 1 и 2 довольно прост, достаточно только показать, что из условий теорем 3 и 4 при всех $j=0,\,\ldots,m-1$ следует, что последовательность $\{c_{mk+j}\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теорем 1 и 2, хотя, возможно, и для других чисел θ и C.

Теоремы 1 и 2, в частности, означают, что если тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \cos(nx) \tag{9}$$

является рядом Фурье (соответственно рядом Фурье — Стильтьеса) и выполнено либо условие (6), либо условие (8), то для сходимости (соответственно ограниченности) частных сумм ряда (9) в метрике L необходимо и достаточно выполнения соответствующего условия (7). Это утверждение останется справедливым, если вместо ряда (9) взять ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \sin(nx)\,. \tag{10}$$

Таким образом, если ряд (9) или (10) является рядом Фурье (соответственно рядом Фурье — Стильтьеса), то изучение сходимости (соответственно ограниченности) его частных сумм в метрике L равнозначно исследованию условия (3). Конечно, для ряда (5) последнее утверждение, если в нем условие (3) заменить на условие (2), также будет верным.

Из теоремы 2 работы [3] легко получаем (см. [3, доказательство теоремы 3]), что если в условиях (6) или (8) вместо постоянной C взять произвольную неограниченную функцию от n, то теоремы 1 и 2 потеряют силу, т. е. в этом смысле правые части условий (6) или (8) неулучшаемы. Из той же теоремы 2 работы [3] следует, что в условии (8) в аргументе функции $\ln^+$ величину $2^n/n$ нельзя заменить на функцию от n, которая есть $o(2^n/n)$.

Для доказательства теорем 1 и 2 в § 2 будут получены новые оценки нормы тригонометрического полинома в метрике L.

Отметим, что теорема 1 при $p = 2$ была доказана в [1], а теорема 3 при $p = 2$ установлена в [3] (см. там теорему 1). Теоремы 1 и 2 значительно усиливают известные результаты (см., например, [5] и [6]) и неулучшаемы в указанном выше смысле.

§ 2. Оценки нормы тригонометрического полинома

Для заданного действительного числа t через $t^+ = \max\{\, t\,,\, 0\,\}$ обозначаем, как обычно, его положительную часть.

Для тригонометрического полинома с комплексными коэффициентами

$$P(x) = \sum_{k=k_1}^{k_2} c_k\, e^{ikx}\,, \qquad k_1 \leqslant k_2\,. \tag{11}$$

будем обозначать

$$l = l(P) = k_2 - k_1 + 1\,,\ M = M(P) = \max\{\,|c_k|\ : k = k_1,\ \ldots, k_2\,\}\,,$$

$$\Delta c_k = c_k - c_{k+1}\,, \quad V = V(P) = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} |\Delta c_k|\,,$$

$$V(r) = V(P, r) = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} (\,|\Delta c_k| - r\,)^+ \qquad \text{при всех} \ \ r \geqslant 0\,, \tag{12}$$

$$\eta(t) = \eta(P, t) = \min\{\, rtV(P) + 2M(P)V(P, r)\ :\ r \geqslant 0\,\}\,, \tag{13}$$

$$H(t) = H(P, t) = \min\{\, rt + V(P, r)\ :\ r \geqslant 0\,\} \qquad \text{при всех} \ \ t \geqslant 0\,. \tag{14}$$

Поскольку $V(r) = 0$ при $r \geqslant 2M(P)$, то минимум в определении функций (13) и (14) существует.

Теорема 5. *Для любого тригонометрического полинома* (11) *и любого числа* $A \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|P\|_L \leqslant \sqrt{2}\, M\left(\sqrt{\frac{l}{A}} + \ln A\right) + \int_1^A \frac{1}{t}\,\sqrt{\eta(t)}\,dt\,. \tag{15}$$

Более того, всегда верна оценка

$$\|P\|_L \leqslant 2M + 4M\ln l + 3\int_1^l \frac{1}{t}\,\sqrt{MH(t)}\,dt\,. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть целое $N \geqslant 0$ таково, что $2^N \leqslant A < 2^{N+1}$. Положим $I = [\,-\pi\, 2^{-N}\,,\, \pi\, 2^{-N}\,]$, $\quad |I| = 2\pi\, 2^{-N}$,

$$I(\nu) = [\,\pi\, 2^{-\nu-1}\,,\, \pi\, 2^{-\nu}\,] \cup [\,-\pi\, 2^{-\nu}\,,\, -\pi\, 2^{-\nu-1}\,] \quad |I(\nu)| = \pi\, 2^{-\nu}\,.$$

Тогда

$$\int_I |P(x)|\,dx \leqslant \sqrt{|I|}\,\left(\int_I |P(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\left(2^{-N}\sum_{k=k_1}^{k_2} |c_k|^2\right)^{1/2} \leqslant 2\pi\, M\,\sqrt{\frac{2l}{A}}\,. \tag{17}$$

При $\nu \geqslant 0\,,\ \ 2^\nu < l$ имеем

$$\int_{I(\nu)} |P(x)|\,dx = \int_{I(\nu)} \Big(2\,|\,\sin(\,2^{\nu-1}x\,)\,|\Big)^{-1} \Big| \Big(1 - e^{-2^\nu xi}\Big)\,P(x) \Big|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{I(\nu)} \Big| \sum_{j=k_1}^{k_2} c_j\,e^{ijx} - \sum_{j=k_1-2^\nu}^{k_2-2^\nu} c_{j+2^\nu}\,e^{ijx} \Big|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{I(\nu)} \Big| \sum_{j=k_2-2^\nu+1}^{k_2} c_j\,e^{ijx} - \sum_{j=k_1-2^\nu}^{k_1-1} c_{j+2^\nu}\,e^{ijx} \Big|\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{I(\nu)} \Big| \sum_{j=k_1}^{k_2-2^\nu} (c_j - c_{j+2^\nu}\,)\,e^{ijx} \Big|\,dx \leqslant \sqrt{2}\,M\,2^\nu\,|I(\nu)| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|I(\nu)|} \Big(\int_{I(\nu)} \Big| \sum_{j=k_1}^{k_2-2^\nu} (c_j - c_{j+2^\nu}\,)\,e^{ijx} \Big|^2\,dx \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\,\pi\,M + \pi \Big(2^{-\nu} \sum_{j=k_1}^{k_2-2^\nu} |c_j - c_{j+2^\nu}\,|^2 \Big)^{1/2}.$$

Если же $2^\nu \geqslant l$, то

$$\int_{I(\nu)} |P(x)|\,dx \leqslant Ml\,|I(\nu)| = Ml\,\pi\,2^{-\nu} \leqslant \pi\,M\,.$$

Поэтому при всех $\nu \geqslant 0$ верна оценка

$$\int_{I(\nu)} |P(x)|\,dx \leqslant \sqrt{2}\,\pi\,M + \pi \Big(2^{-\nu} \sum_{j=k_1}^{k_2-2^\nu} |c_j - c_{j+2^\nu}\,|^2 \Big)^{1/2}, \tag{18}$$

причем последняя сумма считается равной нулю при $k_2 - 2^\nu < k_1$. При $r \geqslant 0$ и $j = k_1,\ \ldots, k_2 - 2^\nu$ имеем $|c_j - c_{j+2^\nu}| \leqslant 2\,M$ и

$$|c_j - c_{j+2^\nu}| \leqslant \sum_{s=0}^{2^\nu-1} |\Delta c_{j+s}| \leqslant 2^\nu\,r + \sum_{s=0}^{2^\nu-1} (\,|\Delta c_{j+s}| - r)^+\,.$$

Отсюда

$$|c_j - c_{j+2^\nu}|^2 \leqslant 2^\nu\,r \sum_{s=0}^{2^\nu-1} |\Delta c_{j+s}| + 2\,M \sum_{s=0}^{2^\nu-1} (\,|\Delta c_{j+s}| - r)^+\,.$$

Поэтому, используя обозначения (12), имеем

$$2^{-\nu} \sum_{j=k_1}^{k_2-2^\nu} |c_j - c_{j+2^\nu}\,|^2 \leqslant r \sum_{s=0}^{2^\nu-1} \sum_{j=k_1}^{k_2-2^\nu} |\Delta c_{j+s}| +$$

$$+ 2\,M\,2^{-\nu} \sum_{s=0}^{2^\nu-1} \sum_{j=k_1}^{k_2-2^\nu} (\,|\Delta c_{j+s}| - r)^+ \leqslant r\,2^\nu\,V(P) + 2\,M\,V(P,r)\,.$$

Отсюда, в силу произвольности $r \geqslant 0$, получаем оценку

$$2^{-\nu} \sum_{j=k_1}^{k_2-2^\nu} |c_j - c_{j+2^\nu}|^2 \leqslant \eta(2^\nu),$$

из которой и из (17) и (18) выводим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P(x)|\, dx = \int_I |P(x)|\, dx + \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{I(\nu)} |P(x)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\pi M \sqrt{\frac{2l}{A}} + \sqrt{2}\,\pi M N + \pi \sum_{\nu=0}^{N-1} \sqrt{\eta(2^\nu)}\,.$$

Поскольку функция $\eta(t)$ не убывает при $t \in [0,\infty)$, то

$$\int_{2^\nu}^{2^{\nu+1}} \frac{1}{t} \sqrt{\eta(t)}\, dt \geqslant \ln 2 \sqrt{\eta(2^\nu)}\,.$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P(x)|\, dx \leqslant 2\pi\, M \sqrt{\frac{2l}{A}} + \sqrt{2}\,\pi\, M\, \frac{\ln A}{\ln 2} +$$
$$+ \frac{\pi}{\ln 2} \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{2^\nu}^{2^{\nu+1}} \frac{1}{t} \sqrt{\eta(t)}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\pi\, M \sqrt{\frac{2l}{A}} + 2\sqrt{2}\,\pi\, M\, \ln A + 2\pi \int_1^A \frac{1}{t} \sqrt{\eta(t)}\, dt\,.$$

Этим оценка (15) доказана. В оценке (15) число A является параметром, и мы будем стремиться подобрать его так, чтобы правая часть оценки (15) была наименьшей хотя бы по порядку. Для доказательства оценки (16) достаточно показать, что найдется такое число $A \geqslant 1$, для которого верна оценка

$$\sqrt{2}\, M \left(\sqrt{\frac{l}{A}} + \ln A \right) + \int_1^A \frac{1}{t} \sqrt{\eta(t)}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2M + 4M \ln l + 3 \int_1^l \frac{1}{t} \sqrt{MH(t)}\, dt\,. \quad (19)$$

Если $l = 1, 2, 3$, то достаточно взять $A = 1$ и (19) верно. Поэтому будем далее предполагать, что $l \geq 4$. Пусть $\Delta_1 \geqslant \cdots \geqslant \Delta_{l-1} \geqslant 0$ — это последовательность $\{\,|\Delta c_k|\,\}_{k=k_1}^{k_2-1}$, перенумерованная в невозрастающем порядке, и пусть $\Delta_l = 0$. Заметим, что функция $H(t)/t$ не возрастает при $t \in (0,\infty)$, и функция

$$rt + V(P,r) = \begin{cases} r(t-j+1) + \sum_{s=1}^{j-1} \Delta_s & \text{при } r \in [\,\Delta_j\,,\,\Delta_{j-1}\,], \\ & \quad j = 2,\ \ldots, l\,, \\ rt & \text{при } r \geqslant \Delta_1\,, \end{cases}$$

принимает при $t \in [\,k-1\,,\,k\,]$, $k = 1,\ \ldots, l-1$, свое минимальное значение в точке $r = \Delta_k$, а при $t \geqslant l-1$ — в точке $r = 0$. Поэтому функция

$$H(t) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{k} \Delta_s - (k-t)\Delta_k & \text{при } t \in [\,k-1\,,\,k\,]\,, \\ & \qquad k = 1,\ \ldots, l-1\,, \\ V(P) & \text{при } t \geqslant l-1\,. \end{cases} \tag{20}$$

Отсюда получаем

$$\int_1^l \frac{1}{t}\sqrt{MH(t)}\,dt \geqslant \int_1^l \frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{M\,\frac{H(l)}{l}}\,dt = \\ = 2(\sqrt{l}-1)\sqrt{M\,V(P)/l} \geqslant \sqrt{M\,V(P)}\,. \tag{21}$$

Отметим, что $V(P) \leqslant 2M(l-1)$. Если $V(P) \leqslant 2M$, то при $A = l$ левая часть (19) не превосходит

$$\sqrt{2}\,M\,(\,1+\ln l\,) + \sqrt{\eta(l)}\,\ln l \leqslant \sqrt{2}\,M\,(\,1+\ln l\,) + \\ + \sqrt{2\,M\,V(P)}\,\ln l \leqslant \sqrt{2}\,M\,(\,1+\ln l\,) + 2\,M\,\ln l \leqslant 2\,M\,(\,1+2\ln l\,)\,,$$

и (19) верно. Поэтому далее считаем, что $V(P) > 2M$. Тогда $M > 0$, $V(P) < 2Ml$ и при $A = 2\,M\,l/V(P)$ левая часть (19) равна

$$\sqrt{M}\,\sqrt{V(P)} + \sqrt{2}\,M\,\ln\Big(\frac{2\,M}{V(P)}\,l\Big) + \int_1^A \frac{1}{t}\sqrt{\eta(t)}\,dt \leqslant \\ \leqslant \sqrt{MV(P)} + \sqrt{2}\,M\,\ln l + \int_{2\,M/V(P)}^{2\,Ml/V(P)} \frac{1}{t}\sqrt{\eta(t)}\,dt = \\ = \sqrt{MV(P)} + \sqrt{2}\,M\,\ln l + \\ + \int_1^l \frac{1}{t}\sqrt{2M\,H(t)}\,dt \leqslant \sqrt{2}\,M\,\ln l + (1+\sqrt{2}\,)\int_1^l \frac{1}{t}\sqrt{M\,H(t)}\,dt\,,$$

где использовано (21), и (19) опять верно. Теорема 5 полностью доказана.

Заметим, что из (20) можно получить оценки

$$\int_1^l \frac{1}{t}\sqrt{M\,H(t)}\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{l} \ln\Big(\frac{k}{k-1}\Big)\Big(M\sum_{s=1}^{k}\Delta_s\Big)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant 2\ln 2\sum_{k=2}^{l}\frac{1}{k}\Big(M\sum_{s=1}^{k}\Delta_s\Big)^{1/2} \leqslant 2\ln 2\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k}\Big(M\sum_{s=1}^{k}\Delta_s\Big)^{1/2}.$$

Поэтому из оценки (16) сразу вытекает оценка

$$\|P\|_L \leqslant 2M + 4M\ln l + 6\ln 2\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k}\Big(M\sum_{s=1}^{k}\Delta_s\Big)^{1/2}. \tag{22}$$

Оценка (22) может рассматриваться как аналог оценки (16).

Следствие 1. *Для любого тригонометрического полинома* (11) *и любого числа* $p>1$ *справедлива оценка*

$$\|P\|_L \leqslant 2M + 4M\ln l + C_p\,(\,M^p\, l^{p-1}\, S_p\,)^{1/(2p)}\,, \tag{23}$$

где

$$S_p = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} |\Delta c_k|^p\,,$$

а положительная постоянная

$$C_p = 6\,(\,p\,(p-1)^{(1-p)/p}\,)^{1/2}\,p/(p-1)$$

зависит только от p.

Доказательство. При $r\geqslant 0$ имеем

$$r^{p-1}\,V(P,r) \leqslant \sum_{k=k_1}^{k_2-1} |\Delta c_k|^{p-1}\,(\,|\Delta c_k| - r\,)^+ \leqslant S_p\,.$$

Отсюда при $t>0$ и $r = (\,(p-1)\,S_p\,/t\,)^{1/p}$ получаем

$$H(t) \leqslant rt + S_p\,r^{1-p} = \frac{p}{(p-1)}\,(\,(p-1)\,S_p\,)^{1/p}\,t^{1-1/p}$$

и

$$\int_1^l \frac{1}{t}\,\sqrt{H(t)}\,dt \leqslant \sqrt{\frac{p}{(p-1)}}\,(\,(p-1)\,S_p\,)^{1/(2p)}\int_1^l t^{(1-1/p)/2-1}\,dt = \\ = \frac{1}{3}\,C_p\,S_p^{1/(2p)}\,l^{(1-1/p)/2}\,.$$

Оценка (23) доказана.

Следствие 2. *Для любого тригонометрического полинома* (11) *и любых чисел* $p>2$ *и* $\theta>0$ *справедлива оценка*

$$\|P\|_L \leqslant 2M + 4M\ln l + C_p\,\theta^{-1/2}\sqrt{M\,\ln l}\,\max\{\sqrt{D_{p,\theta}/l}\,,\,1\,\}\,, \tag{24}$$

где

$$D_{p,\theta} = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \theta\,\frac{l}{\ln l}\,|\Delta c_k|\,\Big(\ln^+\Big(\theta\,\frac{l}{\ln l}\,|\Delta c_k|\Big)\Big)^p$$

при $l\geqslant 2$, $D_{p,\theta}=0$ *при* $l=1$, *а положительная постоянная* C_p *зависит только от* p.

Доказательство. Будем считать, что $l>1$, иначе оценка (24) очевидна. Найдем положительную постоянную $d\geqslant e^p$ так, что $\sqrt{v}\geqslant(\ln v)^p$ при всех $v\geqslant d^2$. Тогда постоянная d зависит только от p. Пусть $D = \max\{\,D_{p,\theta}\,,\,d^2\,l\,\}$. Если $t\in(0,l]$, то $D/t\geqslant d^2$, $\sqrt{D/t}\geqslant(\,\ln(D/t)\,)^p$. Поэтому число

$$\gamma = (D/t)\,(\,\ln(\,D/t\,)\,)^{-p} \geqslant \sqrt{D/t} \geqslant d\,.$$

Положим $r = \gamma \ln l/(l\theta)$. Тогда $\theta\, rl/\ln l \geqslant d \geqslant e$ и

$$D \geqslant D_{p,\theta} \geqslant \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \theta \frac{l}{\ln l} \left(|\Delta c_k| - r\right)^+ \left(\ln^+\left(\theta \frac{l}{\ln l} |\Delta c_k|\right)\right)^p \geqslant$$

$$\geqslant \theta \frac{l}{\ln l} V(r) \left(\ln\left(\theta \frac{l}{\ln l} r\right)\right)^p.$$

Из (14) получаем

$$\theta \frac{l}{\ln l} H(t) \leqslant \gamma\, t + D\, (\ln \gamma)^{-p} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma\, t + D\, (\ln \sqrt{D/t}\ )^{-p} = (1 + 2^p\,)\, D\, (\ln (\, D/t\,)\,)^{-p}.$$

Отсюда

$$\left(\theta \frac{l}{\ln l}\right)^{1/2} \int_1^l \frac{1}{t} \sqrt{H(t)}\, dt \leqslant (1 + 2^p\,)^{1/2} D^{1/2} \int_1^l \frac{1}{t} \left(\ln \frac{D}{t}\right)^{-p/2} dt =$$

$$= (1 + 2^p\,)^{1/2} D^{1/2} \int_{D/l}^{D} \frac{1}{v} (\ln v\,)^{-p/2}\, dv \leqslant A_p\, D^{1/2},$$

где постоянная

$$A_p = (1 + 2^p\,)^{1/2} \int_{d^2}^{\infty} \frac{1}{v} (\ln v\,)^{-p/2}\, dv = (1 + 2^p\,)^{1/2} \frac{2}{(p-2)} (\, 2 \ln d\,)^{1-p/2}$$

зависит только от p. Из последней оценки и из (16) имеем

$$\|P\|_L \leqslant 2M + 4M \ln l + 3\, A_p\, (MD \ln l/(l\,\theta))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2M + 4M \ln l + 3\, A_p\, (M\ \ln l/\theta)^{1/2} \max\{\, (\, D_{p,\theta}/l\,)^{1/2},\, d\,\},$$

и оценка (24) доказана с $C_p = 3d\, A_p$.

§ 3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть условия (6) выполнены. Для любого натурального $n > 2$ найдется такое натуральное m, что $2^m < n \leqslant 2^{m+1}$. Тогда $2n \leqslant 2^{m+2}$ и

$$n^{p-1} \sum_{k=n}^{2n} |\Delta c_k|^p \leqslant 2^{p-1}\, 2^{m(p-1)} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} |\Delta c_k|^p +$$

$$+ 2^{(m+1)(p-1)} \sum_{k=2^{m+1}+1}^{2^{m+2}} |\Delta c_k|^p \leqslant C\, (\, 2^{p-1}\, m^p + (m+1)^p\,) \leqslant$$

$$\leqslant C\, 2^{p+1}\, m^p \leqslant C_1\, (\ln n\,)^p, \quad \text{где} \quad C_1 = C\, 2^{p+1}\, (\ln 2\,)^{-p}.$$

Таким образом, из условия (6) вытекает условие

$$n^{p-1} \sum_{k=n}^{2n} |\Delta c_k|^p \leqslant C_1\, (\ln n\,)^p \quad \text{при всех} \ \ n \geqslant 3. \tag{25}$$

Пусть квадратные скобки обозначают целую часть числа. Тогда

$$\sum_{k=n}^{n+[\sqrt{n}]} |\Delta c_k| \leqslant (\sqrt{n}\,)^{1-1/p} \Bigl(\sum_{k=n}^{n+[\sqrt{n}]} |\Delta c_k|^p \Bigr)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant C_1^{1/p} \ln n \,(\sqrt{n}\,)^{1/p-1} = o(1/\ln n)\,.$$

Поэтому

$$\max_{k=n,\ \dots,n+[\sqrt{n}]} ||c_n| - |c_k|| \leqslant \sum_{k=n}^{n+[\sqrt{n}]} |\Delta c_k| = o(1/\ln n)\,.$$

Отсюда и из [3] (см. там теорему A и формулу (37)) следует, что если выполнено условие (3), то выполнено и условие (7).

Обратно, если выполнено условие (7), то

$$M_n = \max_{m=n,\ \dots,2n} |c_k| = o(1/\ln n) \quad (\text{соответственно } = O(1/\ln n)\,)$$

и при всех натуральных $n \geqslant 3$ из (25) и оценки (23) имеем

$$\max_{m=n,\ \dots,2n} \Bigl\| \sum_{k=n+1}^{m} c_k\, e^{ikx} \Bigr\|_L \leqslant 2M_n + 4M_n \ln n +$$
$$+ C_p \sqrt{M_n \ln n} \,\Bigl(n^{p-1} \sum_{k=n}^{2n} |\Delta c_k|^p \,(\ln n)^{-p} \Bigr)^{1/(2p)} =$$
$$= o(1) \quad (\text{соответственно } = O(1)\,)\,.$$

Следовательно, выполнено условие (4), а значит, и (3).

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнено условие (8). Тогда

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+2}} |\Delta c_k| \Bigl(\ln^+\Bigl(\theta\, \frac{2^m}{m}\, |\Delta c_k|\Bigr)\Bigr)^p \leqslant C\,(2m+1) \quad \text{при всех } \ m \geqslant 1\,.$$

Для любого натурального $n \geqslant 3$ найдется такое натуральное m, что $2^m < n \leqslant 2^{m+1}$. Пусть $E_n = \{\, k = n,\ \dots, n + [\sqrt{n}] \ :\ |\Delta c_k| \geqslant 2^{-3m/4} \,\}$. Тогда

$$\sum_{k\in E_n} |\Delta c_k| \leqslant \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+2}} |\Delta c_k| \Bigl(\ln^+\Bigl(\theta\, \frac{2^m}{m}\, |\Delta c_k|\Bigr)^p \Bigl(\ln^+\Bigl(\theta\, \frac{2^{m/4}}{m}\Bigr)^{-p} \leqslant$$
$$\leqslant C\,(2m+1) \Bigl(\ln^+\Bigl(\theta\, \frac{2^{m/4}}{m}\Bigr)^{-p} = O(m^{1-p})$$

и

$$\sum_{k=n}^{n+[\sqrt{n}]} |\Delta c_k| \leqslant \sqrt{n}\, 2^{-3m/4} + \sum_{k\in E_n} |\Delta c_k| = O((\ln n)^{1-p}\,) = o(1/\ln n\,)\,.$$

Поэтому, как и при доказательстве теоремы 1, из условия (3) вытекает условие (7). Обратно, из условий (7), (8) и следствия 2 сразу получаем (4). Этим теорема 2 полностью доказана.

Легко показать, что теорема 2 содержит в себе теорему 1. Однако, чтобы яснее изложить основную идею предлагаемого метода исследования, мы предпочли доказать теорему 1 непосредственно. Отметим также, что некоторое усложнение использованной в этой статье оценки (16) приводит к доказательству всех результатов, анонсированных в работе [2], где, в частности, анонсирована и теорема 1.

Библиографический список

1. *Белов А. С.* Замечания о сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда // Мат. заметки. 2002. Т. 71. №6. С. 807—817.
2. *Белов А. С.* О новых условиях сходимости в среднем тригонометрических рядов // Тр. Международной школы-семинара по геометрии и анализу, памяти Н. В. Ефимова: Тез. докл. Абрау—Дюрсо, 5—11 сент. 2002 г. Ростов н/Д, 2002. С. 103—105.
3. *Белов А. С.* Об одном условии сходимости в среднем тригонометрических рядов // Мат. заметки. 2001. Т. 69. №3. С. 323—328.
4. *Белов А. С.* Об условиях сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 1. С. 40—46.
5. *Фомин Г. А.* О сходимости рядов Фурье в среднем // Мат. сб. 1979. Т. 110. №2. С. 251—265.
6. *Fridli S.* On the L^1 – convergence of Fourier series // Studia Math. 1997. Vol. 125. №2. P. 161—174.