Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2004 С. 120 – 125

Е. А. Иванова

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГРУППАМИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С ОБЪЕДИНЕННЫМИ КОНЕЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Устанавливаются некоторые условия аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ конечно порожденных нильпотентных групп H и K с конечными объединяемыми подгруппами A и B. Доказано, в частности, что если периодические части групп H и K являются p-группами, то группа G аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда она аппроксимируема конечными p-группами.

Some conditions for the free product $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ of finitely generated nilpotent groups H и K with finite amalgamated subgroups A и B to be residually nilpotent are established. In particular, it is proved that if the torsion subgroups of groups H и K are finite p-groups then the group G is residually nilpotent if and only if it is residually a finite p-group.

УДК 512.543.

1. Основные результаты и предварительные замечания

Говорят, что группа G аппроксимируема группами класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируема), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм этой группы на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что образ элемента g отличен от единицы (см. [4]). В данной статье рассматриваются условия аппроксимируемости нильпотентными группами (класс всех нильпотентных групп будем обозначать символом $\mathcal{N}$) свободного произведения $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ конечно порожденных нильпотентных групп H и K с подгруппами $A \leqslant H$ и $B \leqslant K$, объединенными в силу изоморфизма $\varphi : A \to B$.

Условия $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обычного свободного произведения групп изучались А. И. Мальцевым в работе [3]. В частности, для случая нильпотентных свободных множителей был получен критерий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости, который при дополнительном предположении конечной порожденности перемножаемых групп может быть сформулирован следующим образом:

Свободное произведение $H * K$ неединичных конечно порожденных нильпотентных групп H и K является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда в группах H и K все элементы конечного порядка являются p-элементами для некоторого простого числа p.

Пусть $\mathcal{F}_p$ обозначает класс всех конечных p-групп. К. Грюнберг [6] показал, что конечно порожденная нильпотентная группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(G)$ является конечной p-группой, и что свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп снова является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Поскольку произвольная конечная p-группа нильпотентна, из приведенного результата Мальцева следует, что

свободное произведение двух неединичных конечно порожденных нильпотентных групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p.

Для свободных произведений с объединенными подгруппами это утверждение, вообще говоря, не имеет места (соответствующий пример указан ниже); тем не менее в работе [2] доказано, в частности, что если H и K — конечно порожденные нильпотентные группы, то $\mathcal{N}$-аппроксимируемость группы $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ равносильна ее $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для некоторого простого числа p в каждом из следующих случаев: а) подгруппы A и B являются бесконечными циклическими; б) группы H и K не имеют кручения, а их подгруппы A и B являются центральными; в) группы H и K абелевы. Г. Хигмен [7] отметил, что указанная равносильность имеет место и в случае, когда H и K являются конечными p-группами. Это утверждение допускает следующее обобщение:

Теорема 1. *Пусть $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными конечными подгруппами A и B, причем $A \neq H$ и $B \neq K$. Если в группах H и K все элементы конечного порядка являются p-элементами для некоторого простого числа p, то группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Определенная связь аппроксимируемости нильпотентными группами с аппроксимируемостью конечными примарными группами обобщенного свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп имеет место и в случае, когда отсутствуют ограничения на порядки элементов свободных множителей (но остается предположение о конечности объединяемых подгрупп). Для формулировки соответствующего результата необходимо ввести ряд обозначений.

Как обычно, $\pi(X)$ будет обозначать множество всех простых делителей порядка конечной группы X, а если X — конечная нильпотентная группа, то $S_p(X)$ обозначает (единственную) силовскую p-подгруппу группы X; нам будет удобно использовать это обозначение и в случае, когда $p \notin \pi(X)$, т. е. $S_p(X) = 1$. Группа X является прямым произведением подгрупп $S_p(X)$, где $p \in \pi(X)$; в частности, обозначая через X_p подгруппу группы X, порожденную всеми подгруппами $S_q(X)$, где $q \in \pi(X)$ и $q \neq p$, имеем $X = S_p(X) \times X_p$. Мы сохраняем смысл обозначений $S_p(X)$ и X_p и в случае, когда X — произвольная конечно порожденная нильпотентная группа; в этом случае, разумеется, $S_p(X) \neq 1$ тогда и только тогда, когда $p \in \pi(\tau(X))$, где $\tau(X)$ — периодическая часть группы X, и $\tau(X) = S_p(X) \times X_p$. Заметим, что для любого простого числа p подгруппа X_p является нормальной в группе X, т. к. она состоит в точности из всех p'-элементов этой группы.

Пусть теперь H и K — конечно порожденные нильпотентные группы, $A \leqslant H$, $B \leqslant K$ и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Так как для произвольного простого числа p пересечение $A \cap H_p$ совпадает с множеством всех p'-элементов подгруппы A и пересечение $B \cap K_p$ совпадает с множеством всех p'-элементов подгруппы B, имеем $(A \cap H_p)\varphi = B \cap K_p$. Это равенство означает, что подгруппы H_p и K_p являются (A, B, φ)-совместимыми (см., напр., [5]), и потому мы можем построить свободное произведение $G_p = \big(H/H_p * K/K_p;\ AH_p/H_p = BK_p/K_p, \varphi_p\big)$ фактор-групп H/H_p и K/K_p с подгруппами AH_p/H_p и BK_p/K_p объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_p : AH_p/H_p \to BK_p/K_p$, действующим по правилу $(aH_p)\varphi_p = (a\varphi)K_p$. Естественные отображения группы H на фактор-группу H/H_p и группы K на фактор-группу K/K_p продолжаемы до гомоморфизма ρ_p группы $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ на группу G_p.

В работе [2] было доказано, что если H и K — конечные нильпотентные группы, то группа $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно и группа G_p $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Этот результат обобщается здесь следующим образом:

Теорема 2. *Пусть $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными конечными подгруппами A и B, причем $A \neq H$ и $B \neq K$.*

Если группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема, то существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно и группа G_p является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Обратно, пусть существует такое простое p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно, и для любого простого делителя q порядка подгруппы $\tau(H)$ группа G_q $\mathcal{F}_q$-аппроксимируема. Тогда группа G является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой.

Теорема 2 (в действительности уже приведенный выше ее частный случай из [2]) позволяет привести простой пример свободного произведения с объединенными подгруппами двух нильпотентных групп, которое является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой и не является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого числа p.

Пусть $H = \langle a, c;\ [a, c] = a^2 = c^3 = 1\rangle$ и $K = \langle b, d;\ [b, d] = b^2 = d^3 = 1\rangle$ — прямые произведения двух циклических групп порядков 2 и 3, A — подгруппа группы H, порожденная элементом a, B — подгруппа группы K, порожденная элементом b и $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ — свободное произведение групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с очевидным изоморфизмом $\varphi : A \to B$. Очевидно, что подгруппы H и K являются $3'$-изолированными, $H_3 = A$ и $G_3 \simeq \langle c, d;\ c^3 = d^3 = 1\rangle$ является свободным произведением двух циклических групп порядка 3 и потому — $\mathcal{F}_3$-аппроксимируемой группой. Следовательно, группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема, но не является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого числа p, поскольку содержит элементы порядков 2 и 3.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными подгруппами

A и B, причем подгруппы A и B конечны и $A \neq H$ и $B \neq K$. Предположим также, что в группах H и K все элементы конечного порядка являются p-элементами для некоторого простого числа p. В теореме 1 утверждается, что группа G является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Так как достаточность условия очевидна, докажем, что из $\mathcal{N}$-аппроксимируемости группы G следует ее $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость.

Итак, пусть группа G аппроксимируема нильпотентными группами. Поскольку ее подгруппа $A = B$ конечна, найдется нормальная подгруппа N группы G такая, что фактор-группа $\overline{G} = G/N$ нильпотентна и $N \cap A = 1$. Обозначим через $\overline{T}$ периодическую часть группы $\overline{G}$, а через $\overline{T_p}$, как и выше, — подгруппу, состоящую из всех p'-элементов группы $\overline{T}$. Тогда фактор-группа $\overline{G}/\overline{T_p}$ нильпотентна и не имеет p'-кручения. Записывая подгруппу $\overline{T_p}$ в виде $\overline{T_p} = T_p/N$ для некоторой содержащей N подгруппы T_p группы G, мы видим, что фактор-группа G/T_p, изоморфная группе $\overline{G}/\overline{T_p}$, нильпотентна и не имеет p'-кручения. Кроме того, поскольку пересечение подгрупп $\overline{T_p}$ и $\overline{A} = AN/N$ совпадает, очевидно, с единичной подгруппой, имеем $T_p \cap AN = N$.

Конечно порожденная нильпотентная группа без p'-кручения G/T_p является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой и потому содержит нормальную подгруппу M/T_p, имеющую конечный p-индекс и тривиальное пересечение с (конечной) подгруппой AT_p/T_p. Таким образом, мы нашли нормальную подгруппу M конечного p-индекса группы G такую, что $M \cap AT_p = T_p$. Так как

$$M \cap A = M \cap A \cap AT_p = A \cap T_p = A \cap AN \cap T_p = A \cap N = 1,$$

нормальная подгруппа M группы $G = (H * K; A = B, \varphi)$ тривиально пересекается с объединенной подгруппой A. Поэтому в силу теоремы Х. Нейман (см., напр., [8, с. 247]) группа M является свободным произведением некоторой свободной группы и семейства подгрупп, каждая из которых сопряжена с некоторой подгруппой или группы H, или группы K, т. е. свободным произведением $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп. Таким образом, группа G содержит $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую нормальную подгруппу конечного p-индекса и потому является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть снова $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными конечными подгруппами A и B, причем $A \neq H$ и $B \neq K$.

Если группа G является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, то существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K [1]. Это означает, что $H_p \leqslant A$, $K_p \leqslant B$ и $H_p\varphi = K_p$. Следовательно, подгруппа $H_p = K_p$ нормальна в группе G и потому группа $G_p = \big(H/H_p * K/K_p;\ AH_p/H_p = BK_p/K_p, \varphi_p\big)$ изоморфна фактор-группе G/H_p. Поскольку фактор-группа произвольной $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группы по конечной нормальной подгруппе является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, отсюда следует, что группа G_p $\mathcal{N}$-аппроксимируема. Так как в группах H/H_p и K/K_p все элементы конечного порядка являются p-элементами, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G_p следует из теоремы 1.

Обратно, предположим, что для некоторого простого числа p подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно и для любого $q \in \pi(\tau(H))$ группа G_q является $\mathcal{F}_q$-аппроксимируемой. Как и выше, в этом случае подгруппа $H_p = K_p$ является нормальной в G, и т. к. фактор-группа $G/H_p \cong G_p$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то для элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе H_p, существование гомоморфизма ρ группы G на нильпотентную группу, для которого $g\rho \neq 1$, очевидно.

Если же неединичный элемент $g \in G$ принадлежит подгруппе H_p, равной, напомним, прямому произведению подгрупп $S_q(H)$, где $q \in \pi(\tau(H))$ и $q \neq p$, то проекция элемента g на некоторую подгруппу $S_q(H)$ отлична от единицы. Так как действие на подгруппе H_p соответствующего гомоморфизма ρ_q группы G на группу G_q совпадает с проектированием на подгруппу $S_q(H)$, то $g\rho_q \neq 1$, и существование гомоморфизма ρ группы G на нильпотентную группу, для которого $g\rho \neq 1$, следует теперь из предположения об $\mathcal{F}_q$-аппроксимируемости группы G_q. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999). С. 5—7.
2. *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Вестн. молодых ученых ИвГУ. Иваново, 2002. Вып. 2. С. 3—7.
3. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Т. 25. С. 347—366.
4. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49 – 60.
5. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193—209.
6. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
7. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. of Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301—305.
8. *Karrass A., Solitar D.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 150. P. 227—255.