Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2004 С. 130 – 134

С. В. Колесников

О МНОЖЕСТВАХ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Доказывается, что для любого множества $E \subset \Gamma$, имеющего нулевую логарифмическую емкость и тип G_δ на окружности Γ, существует ограниченная и аналитическая в круге D функция $f(z)$, для которой множество точек расходимости ряда Тейлора на Γ совпадает с E.

It is proved that for arbitrary set $E \subset \Gamma = \{z : |z| = 1\}$ of null logarithmic capacity and type G_δ on Γ there exists bounded analitic function $f(z)$, $z \in D$, such that E is the set of non-convergence for its Teylor series.

УДК 517.514.

Пусть $f(z)$ — функция ограниченная и аналитическая в единичном круге $D : |z| < 1$; Γ — окружность $|z| = 1$. Если круг D является кругом сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$, то на окружности Γ могут быть точки в которых ряд расходится. Обозначим множество всех таких точек $\zeta \in \Gamma$ через $T(f)$. Известно, что $T(f)$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$. Также из теории тригонометрических рядов известно, что множество $T(f)$ имеет нулевую лебегову меру. Возникает вопрос: являются ли эти два свойства множеств $T(f)$ характеристическими для ограниченных аналитических функций, т. е. является ли всякое множество $E \subset \Gamma$ нулевой лебеговой меры и типа $G_{\delta\sigma}$ множеством $T(f)$ для некоторой ограниченной аналитической функции в D.

Ниже доказывается следующая теорема

Теорема. *Для любого множества $E \subset \Gamma$, имеющего нулевую логарифмическую емкость и тип G_δ на окружности Γ, существует ограниченная и аналитическая в круге D функция $f(z)$, для которой множество точек расходимости ряда Тейлора совпадает с E ($T(f) = E$).*

Напомним некоторые необходимые определения и результаты.

Пусть μ — некоторая борелевская мера на комплексной плоскости. Интеграл

$$U_\mu(z) = \int_E \ln \frac{2}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta)$$

будем называть логарифмическим потенциалом меры μ. Нетрудно видеть, что логарифмический потенциал является функцией, гармонической и неотрицательной в круге D. Логарифмической емкостью борелевского множества E называется величина $\operatorname{Cap} E = \sup \mu(E)$, где супремум

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00913) и гранта государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ 1892-2003-1).

берется по всем положительным борелевским мерам, сосредоточенным на E, для которых $U_\mu(z) \leqslant 1$.

Известно, что существует мера μ, называемая равновесной, сосредоточенная на замыкании $\overline{E}$ множества E, такая, что $\mu(\overline{E}) = \operatorname{Cap} E$, для которой потенциал $U_\mu(z)$, называемый равновесным потенциалом, не превосходит 1 и равен 1 во всех точках множества E за исключением подмножества нулевой логарифмической емкости. При этом, если E открытое множество на Γ, равновесная мера μ абсолютно непрерывна, а равновесный потенциал $U_\mu(z)$ аналитичен на E [2].

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $\tilde{O}_n \subset \Gamma$, $n = 1, 2, \dots$, открытые множества на Γ такие, что $E = \cap_{n=1}^{\infty} \tilde{O}_n$.

Построим сначала последовательность положительных мер μ_n и последовательность открытых множеств G_n, $n = 0, 1, \dots$, удовлетворяющих следующим свойствам:

(а) $\cap_{n=1}^{\infty} G_n = E$, $G_n \subset G_{n-1}$;
(б) $U_{\mu_n}(z) \leqslant 1$, $z \in D$;
(в) $U_{\mu_n}(z) > 1 - 1/2^n$, $z \in D \cap G_n$;
(г) $U_{\mu_n}(z) < 1/2^n$, $z \in D \setminus G_{n-1}$, $n > 0$;
(д) $\mu(\Gamma) < 1/2^n$.

Построение будем проводить по индукции.

Возьмем множество $\tilde{O}_1$. Так как $\operatorname{Cap} E = 0$ и борелевские множества измеримы относительно логарифмической емкости, то найдется открытое на окружности Γ множество O_1, $E \subset O_1 \subset \tilde{O}_1$, такое, что $\operatorname{Cap} O_1 < 1/2$. В качестве μ_1 возьмем равновесную меру для O_1. Для каждой точки $\zeta \in O_1$ существует окрестность, в которой выполняется неравенство $U_{mu_1}(z) > 1 - 1/2$ и пересечение которой с Γ содержится в $\tilde{O}_1$. В качестве G_1 возьмем объединение всех таких окрестностей.

Очевидно μ_1 и G_1 удовлетворяют (б), (в) и (д).

Предположим теперь, что меры μ_k и открытые множества G_k, $n = 0, 1, \dots, n-1$, уже построены.

Мера μ_n и G_n строятся следующим образом.

Разобьем каждую из открытых дуг, составляющих множество $\tilde{O}_n \cap G_{n-1}$, двумя последовательностями, сходящимися к ее концам. При этом, т. к. $\operatorname{Cap} E = 0$, а логарифмическая емкость любой невырожденной дуги положительна, точки разбиения можно выбрать из $\Gamma \setminus E$. Совокупность всех полученных дуг расположим в последовательность γ_k, $k = 1, 2, \dots$. Обозначим через ρ_k расстояние от дуги γ_k до границы области G_{n-1}.

Поскольку логарифмическая емкость пересечения $E \cap \gamma_k$ равна нулю, то можно найти такое открытое на Γ множество P_k, что $E \cap \gamma_k \subset P_k \subset \gamma_k$, и

$$\operatorname{Cap} P_k < \frac{2}{2^{n+k} \ln(1/\rho_k)}.$$

Пусть μ_n — равновесная мера множества $O_n = \cup_{k=1}^{\infty} P_k$, а ν_k сужение меры μ_n на интервал γ_k. Так как

$$U_{\nu_k}(z) \leqslant U_{\mu_n}(z) \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то $\mu_n(\gamma_k) = \nu_k(\Gamma) < \operatorname{Cap} P_k < 1/2^{n+k}$, и, следовательно, для меры μ_n

выполняется (д):

$$\mu_n(\Gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\gamma_k) < \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{n+k} = 1/2^n.$$

При $\zeta \notin G_{n-1}$ имеем оценку

$$U_{\mu_n}(z) = \int_\Gamma \ln \frac{2}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_k} \ln \frac{2}{\rho_k}\, d\mu(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n},$$

т. е. выполняется условие (г).

Далее, поскольку потенциал $U_{\mu_n}(z)$ непрерывен и равен 1 на O_n, то для каждой точки множества O_n существует окрестность, в которой выполняется неравенство $U_{\mu_n}(z) > 1 - 1/2^n$ и пересечение которой с Γ содержится в O_n. В качестве G_n возьмем объединение всех таких окрестностей. Очевидно (в) будет выполнено на G_n.

Из (в) и (г) следует, что $G_n \subset G_{n-1}$, а поскольку по построению G_n будет $G_n \cap \Gamma \subset O_n \subset \tilde{O}_n$, то выполнено (а).

Наконец, свойство (б) выполняется потому, что $U_{\mu_n}(z)$ — равновесный потенциал.

Положим теперь

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \mu_n$$

и покажем,что логарифмический потенциал U_μ меры μ ограничен в D и не имеет радиальных пределов в точках множества E.

Действительно, на O_{n-1} — носителе мер μ_n и μ_{n-1} — выполняется неравенство $U_{\mu_n}(z) \leqslant U_{\mu_{n-1}}(z)$, поэтому это неравенство выполняется на всей комплексной плоскости [2], и, следовательно, последовательность $U_{\mu_n}(z)$ монотонно убывает. Отсюда следует, что

$$U_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_{mu_n}(z)$$

ограничен в D: $0 < U_\mu(z) \leqslant 1$. Кроме того, если n нечетно, то

$$U_{\mu_n}(z) - U_{\mu_{n+1}}(z) < U_\mu(z) < U_{\mu_1}(z) - U_{\mu_{n+1}}(z) + U_{\mu_{n+2}}(z). \qquad (1)$$

Отсюда, если $z \in D$ лежит на границе множества G_n, то в силу свойств (в) и (г) $U_{\mu_n}(z) \geqslant 1 - 1/2^n$, $U_{\mu_{n+1}}(z) < 1/2^{n+1}$ и, следовательно,

$$1 - \frac{3}{2^{n+1}} < U_\mu(z), \quad z \in D \cap \partial G_n. \qquad (2)$$

С другой стороны, т. к. на границе области G_{n+1} будет $1 > U_{\mu_1}(z) > U_{\mu_{n+1}}(z) > 1 - 1/2^{n+1}$, $U_{\mu_{n+2}}(z) < 1/2^{n+2}$, то

$$U_\mu(z) < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{3}{2^{n+2}}, \quad z \in D \cap \partial G_{n+1}. \qquad (3)$$

Поскольку радиус круга D с концом в точке $\zeta \in E$ пересекает границу каждого множества G_n, $n = 1\,2, \ldots,$ то из (2) и (3) следует, что в точке ζ нет радиального предела функции $U_\mu(z)$.

Рассмотрим интеграл

$$F(z) = \int\limits_{\Gamma} \ln \frac{2}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta).$$

Очевидно, функция $F(z)$ аналитична в D, $\operatorname{Re} F(z) = U_\mu(z)$ и $F(z)$ представима в D суммой степенного ряда

$$F(z) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n} \zeta^n, \tag{4}$$

где

$$c_0 = \int_\Gamma \ln \frac{2}{\zeta}\, d\mu(\zeta); \;\; c_n = \int_\Gamma \frac{1}{\zeta^{n-1}}\, d\mu(\zeta),\; n = 1,\, 2,\, \ldots .$$

Так как μ_n, $n = 1,\, 2,\, \ldots,$ абсолютно непрерывны, то для любого $\epsilon > 0$ меру μ можно представить в виде $\mu = \gamma_1 + \gamma_2$, где γ_1 — абсолютно непрерывная мера, а γ_2 такая, что ее полная вариация $|\gamma_2|$ удовлетворяет условию $|\gamma_2|(\Gamma) < \epsilon$. Тогда

$$|c_n| = \int_\Gamma \frac{1}{\zeta^{n-1}}\, d\gamma_1(\zeta)| + \int_\Gamma \frac{1}{\zeta^{n-1}}\, d\gamma_2(\zeta)| << \int_\Gamma \frac{1}{\zeta^{n-1}}\, d\gamma_1(\zeta)| + \epsilon.$$

Поскольку моменты абсолютно непрерывной меры стремятся к 0 при $n \to \infty$, то отсюда следует, что $|c_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом из теоремы Абеля и теоремы Таубера [1, с. 595] следует, что ряд (4) сходится в тех и только тех точках окружности Γ, в которых $F(z)$ имеет радиальные пределы.

На множестве E функция $U_\mu(z)$ не имеет радиальных пределов, следовательно, не имеет радиальных пределов и $F(z)$.

Докажем, что $F(z)$ имеет радиальные пределы в точках множества $\Gamma \setminus E$.

Заметим сначала, что логарифмический потенциал $U_|\mu|(z)$ полной вариации $|\mu|$ меры μ конечен в точках $z \in \Gamma \setminus E$.

Действительно, пусть N наибольшее из натуральных чисел n для которых $z \in G_n$. Тогда $U_{\mu_n}(z) < 1/2^n$ при $n > N + 1$ и

$$U|_{|\mu|}(z) \leqslant \sum_{n=1}^{N+1} U_{\mu_n}(z) + \sum_{n=N+2}^{\infty} U_{\mu_n}(z) \leqslant \sum_{n=1}^{N+1} U_{\mu_n}(z) + \frac{1}{2^{N+1}} < \infty.$$

Далее, пусть $z_0 \in \Gamma \setminus E$ и точка z лежит на радиусе круга D с концом в z_0. Нетрудно видеть, что при $\zeta \in \Gamma$

$$\frac{|\zeta - z_0|}{|\zeta - z|} \leqslant \frac{|\zeta - z| + |z - z_0|}{|\zeta - z|} < 2$$

и, следовательно, $|\zeta - z_0|/2 < |\zeta - z|$. Отсюда

$$0 < \left|\ln \frac{2}{\zeta - z}\right| \leqslant \ln \frac{2}{|\zeta - z|} + \left|\arg \frac{1}{\zeta - z}\right| < \\ < \ln \frac{4}{|\zeta - z_0|} + 4\pi < \ln \frac{1}{|\zeta - z_0|} + 4\pi + \ln 4.$$

Интеграл функции, стоящей в правой части этого неравенства, по мере $|\mu|$ конечен, поэтому возможен предельный переход в интеграле

$$\int_\Gamma \ln \frac{1}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)$$

при $z \to z_0$, т. е.

$$\lim_{z \to z_0} \int_\Gamma \ln \frac{1}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta) = \int_\Gamma \ln \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\mu(\zeta).$$

Таким образом, $F(z)$ имеет радиальные пределы в точках множества $\Gamma \backslash E$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
2. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств М.: Мир, 1971. 128 с.