Вестник Ивановского государственного университета

*Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»*

Вып. 3 / 2004 С. 135 – 138

**Е. Д. Логинова**

# О ФИНИТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП С ЦЕНТРАЛИЗОВАННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Доказано, что в свободном произведении с объединенной подгруппой двух конечно порожденных абелевых групп все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Отсюда следует финитная отделимость всех конечно порожденных подгрупп свободного произведения конечно порожденных абелевых групп с централизованными подгруппами.

It is proved that all finitely generated subgroups of an amalgamated free product of two finitely generated abelian groups are finitely separable. This implies the finite separability of all finitely generated subgroups of a free product of finitely generated abelian groups with centralized subgroups.

УДК 512.543.

1. Пусть $A$ и $B$ — некоторые группы с подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$. Фактор-группа $\big(A * B;\ [H, K] = 1\big)$ свободного произведения $A * B$ групп $A$ и $B$ по нормальному замыканию взаимного коммутанта подгрупп $H$ и $K$ называется свободным произведением групп $A$ и $B$ с коммутирующими подгруппами $H$ и $K$, а фактор-группа

$$\big(A * B;\ [A, K] = 1,\ [H, B] = 1\big)$$

группы $A * B$ по нормальному замыканию объединения взаимных коммутантов подгрупп $A$ и $K$ и подгрупп $H$ и $B$ называется свободным произведением групп $A$ и $B$ с централизованными подгруппами $H$ и $K$ (см. [4, с. 230]).

Условия финитной аппроксимируемости этих теоретико-групповых конструкций рассматривались в работах [1, 2], где было доказано, что в невырожденных случаях финитная аппроксимируемость каждой из этих групп равносильна финитной отделимости подгрупп $H$ и $K$ в группах $A$ и $B$ соответственно (если хотя бы одна из подгрупп $H$ или $K$ единична, то группа $\big(A * B;\ [H, K] = 1\big)$ является свободным произведением групп $A$ и $B$, а если $H = A$ или $K = B$, то группа $\big(A * B;\ [A, K] = 1,\ [H, B] = 1\big)$ является прямым произведением групп $A$ и $B$, и в этих случаях финитная аппроксимируемость рассматриваемых конструкций равносильна финитной аппроксимируемости сомножителей). В работе [3] показано, что финитная отделимость подгрупп $H$ и $K$ является необходимым и достаточным условием и для того, чтобы свободное произведение групп $A$ и $B$ с коммутирующими подгруппами $H$ и $K$ наследовало от сомножителей свойство финитной отделимости всех циклических подгрупп; аналогичное утверждение можно доказать и для свободного произведения с централизованными подгруппами. С другой стороны, в той же работе отмечено, что финитную отделимость всех конечно порожденных подгрупп свободного произведения с коммутирующими или централизованными подгруппами групп $A$ и $B$, все конечно порожденные подгруппы которых финитно отделимы, указанные условия не обеспечивают. Например, свободное произведение свободных групп $A$ и $B$ с коммутирующими или централизованными подгруппами $H$ и $K$ содержит неотделимую конечно порожденную подгруппу, если обе подгруппы $H$ и $K$ не являются циклическими. Тем не менее здесь будет доказана

**Теорема 1.** *Все конечно порожденные подгруппы свободного произведения $G = \big(A * B;\ [A,K]=1,\ [H,B]=1\big)$ конечно порожденных абелевых групп $A$ и $B$ с централизованными подгруппами $H$ и $K$ финитно отделимы.*

Легко видеть (см., напр., [2]), что свободное произведение $G = \big(A * B;\ [A,K]=1,\ [H,B]=1\big)$ групп $A$ и $B$ с централизованными подгруппами $H$ и $K$ является свободным произведением $\big(M * N;\ U\big)$ групп $M$ и $N$ с объединенной подгруппой $U$, где $M = A \times K$ — прямое произведение групп $A$ и $K$, $N = H \times B$ — прямое произведение групп $H$ и $B$ и $U = H \times K$ — прямое произведение групп $H$ и $K$. Таким образом, если группы $A$ и $B$ абелевы с конечным числом порождающих, то группа $G$ является свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечно порожденных абелевых групп. Поэтому теорема 1 вытекает из следующего более общего утверждения:

**Теорема 2.** *Все конечно порожденные подгруппы свободного произведения $G = \big(A * B;\ H\big)$ конечно порожденных абелевых групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$ финитно отделимы.*

Отметим, что вопрос о финитной отделимости конечно порожденных подгрупп свободного произведения с коммутирующими подгруппами конечно порожденных абелевых групп остается открытым.

2. Для доказательства теоремы 2 нам потребуются два вспомогательных утверждения.

**Предложение 1.** (предложение 1 из [5]) *Пусть $G$ — группа с бесконечным центром, отличным от квазициклической группы. Если для любой неединичной центральной подгруппы $A$ группы $G$ все конечно порожденные подгруппы фактор-группы $G/A$ являются финитно отделимыми, то и все конечно порожденные подгруппы группы $G$ финитно отделимы.*

**Предложение 2.** *Пусть $G$ — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа и $F$ — конечная нормальная подгруппа группы $G$. Все конечно порожденные подгруппы группы $G$ являются финитно отделимыми тогда и только тогда, когда финитно отделимы все конечно порожденные подгруппы фактор-группы $G/F$.*

В самом деле, предположим сначала, что все конечно порожденные подгруппы группы $G$ являются финитно отделимыми. Произвольная конечно порожденная подгруппа фактор-группы $G/F$ представима в виде $H/F$ для некоторой конечно порожденной подгруппы $H$ группы $G$, содержащей $F$. Если элемент $gF$ фактор-группы $G/F$ не входит в подгруппу $H/F$, то в группе $G$ все элементы семейства $gf$, где $f \in F$, не входят в подгруппу $H$. Так как это семейство конечно, найдется нормальная подгруппа $N$ конечного индекса группы $G$ такая, что $gf \notin HN$ для любого $f \in F$. Это означает, что элемент $gF$ не входит в подгруппу $HN/F = H/F \cdot NF/F$, где $NF/F$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $G/F$, что и доказывает финитную отделимость подгруппы $H/F$.

Обратно, пусть в фактор-группе $G/F$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Так как группа $G$ финитно аппроксимируема, а ее подгруппа $F$ конечна, найдется нормальная подгруппа $M$ конечного индекса группы $G$ такая, что $M \cap F = 1$. Группа $M$ вложима в фактор-группу $G/F$, и потому все ее конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Следовательно, группа $G$ является конечным расширением группы с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами, а потому и сама является группой с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2.

Пусть $G = (A * B;\, H)$ — свободное произведение конечно порожденных абелевых групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$. Тогда центр группы $G$ совпадает с подгруппой $H$, а фактор-группа $G/H$ является (обычным) свободным произведением групп $A/H$ и $B/H$. Из теоремы Н. С. Романовского [6], утверждающей, что свободное произведение групп с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами является группой с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами, следует поэтому, что в фактор-группе $G/H$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Так как, к тому же, группа $G$ является финитно аппроксимируемой (см., напр., [7, теорема 8]), из предложения 2 следует, что если подгруппа $H$ конечна, то все конечно порожденные подгруппы группы $G$ финитно отделимы.

Последнее замечание говорит о том, что мы располагаем основанием индукции по рангу объединяемой подгруппы $H$. Здесь имеется в виду обычное определение ранга абелевой группы как числа элементов в максимальной линейно независимой системе элементов этой группы (и потому ранг конечной абелевой группы равен 0).

Предположим теперь, что подгруппа $H$ является бесконечной и что в любом свободном произведении двух конечно порожденных абелевых групп с объединенной подгруппой, ранг которой меньше ранга группы $H$, все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Покажем, что тогда и в группе $G$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Для этого заметим, прежде всего, что без потери общности можно предполагать, что подгруппа $H$ не имеет кручения.

Действительно, если $T$ — периодическая часть подгруппы $H$, то ранги групп $H$ и $H/T$ совпадают. Кроме того, фактор-группа $G/T$ группы $G$ по ее конечной (центральной) подгруппе $T$ изоморфна свободному произведению групп $A/T$ и $B/T$ с объединенной подгруппой $H/T$, не содержащей элементов конечного порядка, а в силу предложения 2 все конечно порожденные подгруппы группы $G$ финитно отделимы тогда и только тогда, когда все конечно порожденные подгруппы группы $G/T$ финитно отделимы.

Итак, мы можем считать, что $H$ является свободной абелевой группой конечного ранга. Очевидно, что если $U$ — неединичная подгруппа группы $H$, то ранг фактор-группы $H/U$ меньше ранга группы $H$. Поэтому из индуктивного предположения следует, что для любой неединичной центральной подгруппы $U$ группы $G$ все конечно порожденные подгруппы фактор-группы $G/U$ являются финитно отделимыми. Ввиду предложения 1 тогда и в группе $G$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, и индуктивный шаг завершен. Тем самым, теорема 2 доказана.

**Библиографический список**

1. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395—407.
2. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999). С. 101—104.
3. *Логинова Е. Д.* Финитная отделимость циклических подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Там же. Вып. 3 (2000). С. 47—53.
4. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. *Молдаванский Д. И., Тимофеева Л. В.* Конечно порожденные подгруппы группы, определяемой одним соотношением и обладающей нетривиальным центром, финитно отделимы // Изв. вузов. Математика. 1987. Вып. 12. С. 58—59.
6. *Романовский Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33. № 6. С. 1324—1329.
7. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106 № 2. P. 193—209.