Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2005 С. 59 – 67

Д. Н. Азаров, Д. И. Молдаванский

О СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ, АППРОКСИМИРУЕМЫХ КОНЕЧНЫМИ *P*-ГРУППАМИ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ

Доказано, что сверхразрешимая группа является аппроксимируемой конечными p-группами относительно сопряженности тогда и только тогда, когда она содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения конечного p-индекса.

It is proved that a supersolvable group is conjugacy separable by finite p-groups if and only if it contains an abelian normal torsion-free subgroups of finite p-index.

УДК 512.543.

1. Введение. Формулировка результатов

Напомним, что если $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, то группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности), если для любых различных (соответственно не сопряженных) элементов a и b этой группы найдется гомоморфизм группы G на некоторую группу X, принадлежащую классу $\mathcal{K}$, при котором образы элементов a и b различны (соответственно не сопряжены в группе X). Таким образом, классическое понятие финитной аппроксимируемости (относительно сопряженности) совпадает с понятием $\mathcal{F}$-аппроксимируемости (относительно сопряженности), где $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп. Класс всех конечных p-групп будет обозначаться символом $\mathcal{F}_p$.

Хорошо известно, что все конечно порожденные нильпотентные группы и, более общо, все сверхразрешимые группы являются $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми (поскольку, например, произвольная полициклическая группа вложима в целочисленную матричную группу [5, с. 200]). В 1965 году Н. Блэкберн [6] установил, что любая конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности. Обобщая этот результат, М. И. Каргаполов [4] в 1967 году доказал $\mathcal{F}$-аппроксимируемость относительно сопряженности произвольной сверхразрешимой группы.

Переходя к аппроксимируемости в классе всех конечных p-групп, прежде всего заметим, что свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности представляет собой значительно более жесткое ограничение, чем $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость даже для групп, $\mathcal{F}$-аппроксимируемых относительно сопряженности. Так, конечно порожденная нильпотентная группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(G)$ является p-группой (см. [7]), а $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость этой группы относительно сопряженности оказалась (см. [3]) равносильной тому, что $\tau(G)$ является p-группой и фактор-группа $G/\tau(G)$ абелева.

Легко видеть, что конечно порожденная нильпотентная группа удовлетворяет этим требованиям в точности тогда, когда она содержит нормальную подгруппу конечного p-индекса, являющуюся абелевой группой без кручения. Действительно, если периодическая часть $\tau(G)$ конечно порожденной нильпотентной группы G является (конечной) p-группой, то согласно теореме Грюнберга [7] группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и потому обладает такой нормальной подгруппой A конечного p-индекса, что $A \cap \tau(G) = 1$. Поэтому группа A вложима в фактор-группу $G/\tau(G)$ и, следовательно, не имеет кручения, а если $G/\tau(G)$ является вдобавок абелевой группой, то и группа A абелева. Обратно, если A — нормальная абелева подгруппа конечного p-индекса конечно порожденной нильпотентной группы G, то периодическая часть $\tau(G)$ этой группы вложима в фактор-группу G/A и потому должна быть p-группой. Абелева подгруппа $A\tau(G)/\tau(G)$ фактор-группы $G/\tau(G)$ имеет в ней конечный индекс, и так как группа $G/\tau(G)$ является конечно порожденной нильпотентной и не имеет кручения, она вся абелева.

Таким образом, приведенный только что результат из [3] утверждает, что конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда она содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения конечного p-индекса, и в таком виде он допускает следующее обобщение:

Теорема 1. *Сверхразрешимая группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда она содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения конечного p-индекса.*

Ранее нами было доказано в [1], что если p — нечетное простое число, то любая $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая сверхразрешимая группа должна быть нильпотентной. Поэтому утверждение теоремы 1 является новым только для случая $p = 2$. В этом случае условие аппроксимируемости сверхразрешимой группы относительно сопряженности можно сформулировать на языке ее подгруппы Фиттинга (т. е. наибольшей нильпотентной нормальной подгруппы).

Теорема 2. *Сверхразрешимая группа G $\mathcal{F}_2$-аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда ее подгруппа Фиттинга F удовлетворяет любому из следующих двух равносильных условий:*

(1) *фактор-группа $F/\tau(F)$ группы F по ее периодической части является абелевой, а группы G/F и $\tau(F)$ — конечными 2-группами;*
(2) *фактор-группа $F/\tau(F)$ абелева, и все элементы конечного порядка группы G являются 2-элементами.*

Заметим, что критерий $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемости сверхразрешимой группы G, состоящий в требовании отсутствия в ней $2'$-кручения (см. [1]), на этом языке принимает следующий вид: сверхразрешимая группа G $\mathcal{F}_2$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы G/F и $\tau(F)$

являются конечными 2-группами. Таким образом, среди $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемых сверхразрешимых групп группы, $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемые относительно сопряженности, выделяются дополнительным требованием коммутативности фактор-группы $F/\tau(F)$. Из теоремы 2 и упомянутых выше результатов работ [1] и [3] следует также, что для любого простого числа p $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая сверхразрешимая группа является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности ее подгруппа Фиттинга.

2. Доказательства теорем

Пусть снова $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что подмножество M группы G называется $\mathcal{K}$-отделимым, если для любого элемента g этой группы, не лежащего в M, найдется гомоморфизм φ группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что $g\varphi \notin M\varphi$.

Следуя [2], элемент g группы G будем называть C_{f_p}-отделимым, если множество всех элементов, сопряженных с g, является $\mathcal{F}_p$-отделимым. Очевидно, что группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы $\mathcal{F}_p$-отделим. Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в работе [2]:

Предложение 1. *Пусть H — субнормальная подгруппа конечного p-индекса группы G. Если элемент $h \in H$ является C_{f_p}-отделимым в группе H, то он C_{f_p}-отделим и в группе G.*

Покажем сначала, что сформулированное в теореме 1 условие $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости сверхразрешимой группы относительно сопряженности является достаточным.

Предложение 2. *Пусть сверхразрешимая группа G содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения, имеющую в G конечный p-индекс. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Доказательство. Пусть A — нормальная абелева подгруппа без кручения конечного p-индекса группы G. Зафиксируем также произвольный элемент g группы и покажем, что он является C_{f_p}-отделимым.

Поскольку фактор-группа G/A нильпотентна, подгруппа H группы G, порождаемая подгруппой A и элементом g, субнормальна. К тому же ее индекс в группе G конечен и является p-числом, поэтому в силу предложения 1 достаточно показать, что элемент g является C_{f_p}-отделимым в группе H. Иначе говоря, мы можем без потери общности предполагать, что группа G порождается подгруппой A и элементом g.

Легко видеть, что множество $K = \{a^{-1}g^{-1}ag \mid a \in A\}$ является нормальной подгруппой группы G, лежащей в подгруппе A. Кроме того, фактор-группа G/K абелева, и потому коммутант G' группы G содержится в подгруппе K. Так как противоположное включение очевидно, имеем $G' = K$.

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Все элементы конечного порядка фактор-группы A/G' являются 2-элементами.*

Для доказательства этого воспользуемся индукцией по рангу $r(A)$ свободной абелевой группы A, отметив сразу же, что при $r(A) = 0$ сформулированное утверждение очевидно.

Пусть $r(A) > 0$. Тогда группа G бесконечна, и так как она сверхразрешима, в ней существует нормальная подгруппа Y, являющаяся бесконечной циклической группой. Заменив, если необходимо, подгруппу Y ее пересечением с A, без потери общности можем считать, что $Y \subseteq A$. Обозначим через X изолятор подгруппы Y в группе A. Тогда X — бесконечная циклическая подгруппа группы A, фактор-группа A/X по которой не имеет кручения, и $r(A/X) = r(A) - 1$. Легко видеть, кроме того, что X является нормальной подгруппой группы G. Фактор-группа G/X сверхразрешима, обладает абелевой нормальной подгруппой A/X без кручения, индекс которой конечен и является p-числом, и порождается этой подгруппой и элементом gX. По индуктивному предположению все элементы конечного порядка фактор-группы подгруппы A/X по коммутанту $(G/X)'$ группы G/X являются 2-элементами. Так как

$$\big(A/X\big)/\big(G/X\big)' = \big(A/X\big)/\big(G'X/X\big) \simeq A/G'X \simeq \big(A/G'\big)/\big(G'X/G'\big),$$

остается показать, что все элементы конечного порядка группы $G'X/G'$ являются 2-элементами. В действительности, имеет место более сильное утверждение: порядок группы $G'X/G' \simeq X/X \cap G'$ либо бесконечен, либо не превосходит 2.

В самом деле, для порождающего элемента x группы X выполнено соотношение $g^{-1}xg = x^{\pm 1}$. Если $g^{-1}xg = x^{-1}$, то $x^2 \in G'$, и тогда порядок группы $X/X \cap G'$ не превосходит 2. Пусть теперь $g^{-1}xg = x$ и пусть z — произвольный элемент из подгруппы $X \cap G'$. Тогда элементы g и z перестановочны и $z = a^{-1}g^{-1}ag$ для подходящего $a \in A$. Следовательно, $g^{-1}ag = az$, и потому для любого целого числа k получаем $g^{-k}ag^k = az^k$. Так как индекс подгруппы A в группе G конечен, для некоторого $m > 0$ выполнено включение $g^m \in A$, и потому при $k = m$ последнее равенство принимает вид $z^m = 1$. Поскольку z — элемент бесконечной циклической группы X, отсюда имеем $z = 1$, так что $X \cap G' = 1$ и порядок группы $X/X \cap G'$ бесконечен. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Группа G/G' является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.*

В самом деле, из леммы 1 следует, что подгруппа A/G' группы G/G' является $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемой. Поскольку при $p = 2$ фактор-группа

$$\big(G/G'\big)/\big(A/G'\big) \simeq G/A$$

является конечной 2-группой, в этом случае утверждение леммы справедливо.

Пусть теперь $p \neq 2$. Покажем, что в этом случае группа G абелева.

Так как G является расширением ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) свободной абелевой группы A при помощи конечной p-группы, группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Поэтому в силу упомянутого выше результата из работы [1] G является нильпотентной группой. Далее, выбрав простое число q, отличное от p, и произвольное целое $n > 0$, полагаем $\overline{A} = A/A^{q^n}$ и $\overline{G} = G/A^{q^n}$. Тогда $\overline{G}$ — конечная нильпотентная группа, порядок которой является $\{p, q\}$-числом. Поскольку $\overline{G}/\overline{A} \simeq G/A$, силовская q-подгруппа группы $\overline{G}$ совпадает с $\overline{A}$, а силовская p-подгруппа изоморфна группе G/A и потому является циклической. Следовательно, $\overline{G}$ является абелевой группой. Так как $\bigcap_{n=1}^{\infty} A^{q^n} = 1$, отсюда следует, что группа G аппроксимируема абелевыми группами, а потому и сама является абелевой.

Таким образом, в этом случае фактор-группа G/G' изоморфна группе G, которая, как было отмечено выше, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и лемма 2 доказана.

Теперь мы готовы доказать, что элемент g является C_{f_p}-отделимым.

Пусть h — произвольный элемент группы G, не сопряженный с элементом g. Если элементы g и h принадлежат разным смежным классам по подгруппе A, то их образы при естественном гомоморфизме группы G на фактор-группу G/A не являются сопряженными, поскольку эта фактор-группа абелева.

Остается рассмотреть случай, когда $h = gc$ для некоторого элемента $c \in A$. Заметим, что элемент c не принадлежит коммутанту G' группы G. Действительно, в противном случае $c = a^{-1}g^{-1}ag$ для подходящего $a \in A$, откуда $gc = aga^{-1}$, что невозможно, поскольку элементы g и h не сопряжены. Таким образом, элемент cG' фактор-группы G/G' отличен от единицы, и в силу леммы 2 существует гомоморфизм ρ группы G/G' на конечную p-группу P такой, что $(cG')\rho \neq 1$. Поэтому произведение σ естественного гомоморфизма группы G на фактор-группу G/G' и гомоморфизма ρ переводит элемент c в неединичный элемент группы P. Следовательно, образы относительно отображения σ элементов g и h являются различными элементами группы P, а потому и не сопряженными в ней элементами, поскольку эта группа абелева.

Предложение 2 доказано.

Одним из существенных шагов в доказательстве основного результата работы [3] является предложение 3 этой работы, утверждающее, в частности, что конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая относительно сопряженности, является абелевой. Здесь мы обобщаем это утверждение, сохранив практически без изменений его доказательство, приведенное в [3].

Предложение 3. *Если группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности, то любая нормальная подгруппа группы G, являющаяся конечно порожденной нильпотентной группой без кручения, абелева.*

Доказательство. Пусть N — нормальная конечно порожденная нильпотентная подгруппа группы G, не имеющая кручения, и пусть

$$1 = Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \cdots \leqslant Z_n = N$$

— верхний центральный ряд группы N. Если предположить, рассуждая от противного, что группа N не является абелевой, то $N \neq Z_1$, и потому в подгруппе Z_2 можно выбрать элемент a, не принадлежащий подгруппе Z_1. Поэтому для некоторого элемента $b \in N$ коммутатор $c = a^{-1}b^{-1}ab$ отличен от единицы. Тогда $b^{-1}ab = ac$, и так как элемент c лежит в центре группы N, для любого целого числа k имеем $b^{-k}ab^k = ac^k$.

Фиксируем далее простое число q, отличное от p. Так как группа N является $\mathcal{F}_q$-аппроксимируемой и $c \neq 1$, для некоторого положительного числа n мы будем иметь $c \notin N^{q^n}$. Таким образом, характеристическая подгруппа N^{q^n} группы N содержит элемент a^{q^n} и не содержит элемента $a^{q^n}c$, так что не существует автоморфизма этой группы, переводящего один из этих элементов в другой. Следовательно, элементы a^{q^n} и $a^{q^n}c$ не сопряжены в группе G.

С другой стороны, предположим, что по модулю некоторой нормальной подгруппы H конечного индекса группы G порядок m элемента c не делится на q. Тогда существует целое число k, удовлетворяющее сравнению $q^n k \equiv 1 \pmod{m}$. Поэтому

$$c^{q^n k} \equiv c \pmod{H},$$

откуда с учетом равенства $b^{-k}ab^k = ac^k$ получаем

$$a^{q^n}c \equiv a^{q^n}c^{q^n k} = (ac^k)^{q^n} = b^{-k}a^{q^n}b^k \pmod{H}.$$

Таким образом, не сопряженные в группе G элементы a^{q^n} и $a^{q^n}c$ оказываются сопряженными по модулю каждой нормальной подгруппы конечного p-индекса группы G. Так как это противоречит $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G относительно сопряженности, предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Пусть конечно порожденная почти нильпотентная группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Тогда*

(1) *фактор-группа G/F группы G по ее подгруппе Фиттинга F является конечной p-группой;*

(2) *группа G содержит нормальную подгруппу конечного p-индекса, являющуюся нильпотентной группой без кручения.*

Доказательство. Напомним, что подгруппа Фиттинга F группы G порождается всеми нормальными нильпотентными подгруппами группы G. Так как по условию группа G почти нильпотентна, F является в ней нормальной нильпотентной подгруппой конечного индекса. Пусть H — максимальная нильпотентная подгруппа группы G, содержащая подгруппу F. Покажем, что подгруппа H является $\mathcal{F}_p$-отделимой в G.

В самом деле, если это не так, то в группе G существует подгруппа L, строго содержащая подгруппу H и такая, что $L\varphi = H\varphi$ для любого гомоморфизма φ группы G на конечную p-группу. Если целое число n больше ступени нильпотентности группы H, то в H выполнено тождество $\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] = 1$, где $\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$ — простой коммутатор веса n. Так как группа L не является нильпотентной, то для подходящих ее элементов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ элемент $v = \left[v_1, v_2, \ldots, v_n\right]$ отличен от единицы. С другой стороны, если φ — произвольный гомоморфизм группы G на конечную p-группу, то элементы $v_1\varphi, v_2\varphi, \ldots, v_n\varphi$ принадлежат подгруппе $L\varphi = H\varphi$, и так как подгруппа $H\varphi$ удовлетворяет тождеству $\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] = 1$, имеем

$$v\varphi = \left[v_1\varphi, v_2\varphi, \ldots, v_n\varphi\right] = 1,$$

что противоречит $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G.

Поскольку произвольная подгруппа, сопряженная с $\mathcal{F}_p$-отделимой, является, очевидно, $\mathcal{F}_p$-отделимой и пересечение произвольного семейства $\mathcal{F}_p$-отделимых подгрупп является $\mathcal{F}_p$-отделимой подгруппой, подгруппа

$$K = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$$

$\mathcal{F}_p$-отделима. Но K является нормальной нильпотентной подгруппой

группы G, содержащей подгруппу F, так что $K = F$. Таким образом, подгруппа F является $\mathcal{F}_p$-отделимой. Так как нормальная подгруппа конечного индекса некоторой группы $\mathcal{F}_p$-отделима в точности тогда, когда ее индекс является p-числом, мы видим, что фактор-группа G/F является конечной p-группой, и утверждение (1) доказано.

Для доказательства утверждения (2) заметим, что так как группа F является конечно порожденной (как подгруппа конечного индекса конечно порожденной группы G), ее периодическая часть $\tau(F)$ конечна. Поэтому из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G следует существование в ней нормальной подгруппы M конечного p-индекса такой, что $M \cap \tau(F) = 1$. Следовательно, подгруппа $N = M \cap F$ является нильпотентной группой без кручения. Так как пересечение нормальных подгрупп конечного p-индекса произвольной группы снова является ее нормальной подгруппой конечного p-индекса, предложение 4 доказано полностью.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 1. Действительно, из предложения 4 следует, что конечно порожденная почти нильпотентная группа G, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая относительно сопряженности, содержит нормальную подгруппу N конечного p-индекса, являющуюся нильпотентной группой без кручения, а в силу предложения 3 подгруппа N должна быть абелевой. Таким образом, необходимость условия в теореме 1 следует из того, что произвольная сверхразрешимая группа почти нильпотентна.

Переходя к характеризации аппроксимируемости сверхразрешимой группы конечными 2-группами на языке ее подгруппы Фиттинга, отметим прежде всего справедливость следующего утверждения:

Предложение 5. *Сверхразрешимая группа G $\mathcal{F}_2$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группа G/F группы G по ее подгруппе Фиттинга F и периодическая часть $\tau(F)$ группы F являются конечными 2-группами.*

В самом деле, как уже отмечалось выше, в работе [1] доказано, что $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемость сверхразрешимой группы G равносильна отсутствию в ней $2'$-кручения. Так как это условие является очевидным следствием того, что G/F и $\tau(F)$ — конечные 2-группы, в одну сторону предложение 5 доказано. Обратно, если группа G $\mathcal{F}_2$-аппроксимируема, то фактор-группа G/F является конечной 2-группой в силу предложения 4, а аналогичное утверждение о подгруппе $\tau(F)$ очевидно.

Ввиду теоремы 1 для доказательства теоремы 2 достаточно доказать

Предложение 6. *Для произвольной сверхразрешимой группы G следующие утверждения равносильны:*

(1) *группа G содержит абелеву нормальную подгруппу без кручения конечного 2-индекса;*

(2) *фактор-группа $F/\tau(F)$ подгруппы Фиттинга F группы G по ее периодической части $\tau(F)$ абелева, и все элементы конечного порядка группы G являются 2-элементами;*

(3) *фактор-группа $F/\tau(F)$ абелева, а группы G/F и $\tau(F)$ являются конечными 2-группами.*

Действительно, утверждение (2) является следствием утверждения (1), так как если группа G почти абелева, то и группа $F/\tau(F)$ почти абелева, а потому является абелевой, поскольку она нильпотентна и без кручения; отсутствие в группе G 2'-кручения при условии выполнимости (1) очевидно.

Если выполнено утверждение (2), то в силу [1] группа G $\mathcal{F}_2$-аппроксимируема, и выполнимость недостающих требований в (3) следует из предложения 5.

Наконец, если выполнено утверждение (3), то в силу предложения 5 группа G является $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемой и потому содержит нормальную подгруппу N конечного 2-индекса такую, что $N \cap \tau(F) = 1$. Тогда подгруппа $A = N \cap F$ является нормальной подгруппой конечного 2-индекса группы G, а также — абелевой группой без кручения, поскольку она вложима в фактор-группу $F/\tau(F)$. Таким образом, утверждение (1) следует из (3), и предложение 6 доказано.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Иваново, 1999. Вып. 2. С. 8—9.
2. *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами свободных произведений двух групп с объединенной подгруппой // Матем. заметки. 2004. Т. 76. Вып. 4. С. 502—509.
3. *Иванова Е. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 125—130.
4. *Каргаполов М. И.* Финитная аппроксимируемость сверхразрешимых групп относительно сопряженности // Алгебра и логика. 1967. Т. 6. С. 63—68.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
6. *Blackburn N.* Conjugacy in nilpotent groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 16. P. 143—148.
7. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.