Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2005 С. 67 – 73

Е. П. Барановский

ОБ L-РАЗБИЕНИИ, ЗАДАННОМ В ПРОСТРАНСТВЕ E^{24} РЕШЁТКОЙ ЛИЧА

Перечислены первичные элементы L-разбиения решетки Лича. Показано, что среди L-многогранников этой решетки не существует таких, которые бы определяли основной репер решетки, т. е. имели бы базисное множество вершин.

(Существование $L-$многогранников, не имеющих базисного множества вершин, в случае решеток достаточно высокой размерности было отмечено М. Дутором. Он построил пример такого многогранника для 12-мерной решетки.)

The Leech lattice is represented as a centering of Voronoi second perfect lattice. It was obtained the set of the primary elements of L-partitioning of the Leech lattice. It was showed that all L-polytopes of Leech lattice are non-basic.

(The first example of an L-polytope which was non-basic polytope of its lattice was constructed by M. Dutour.)

УДК 514.174.

§ 1. Решетка Лича как центрировка, построенная на основе двоичного кода Голея

Возьмём составленную из нулей и единиц 11-значную строку

$$a_1 = (10100011101)$$

и посредством циклических сдвигов на один знак вправо получим еще соответственно каждому сдвигу 10 строк $a_2, ..., a_{11}$. Будем рассматривать все 11 строк как последовательные (в таком же порядке, как они пронумерованы) строки (11x11)-матрицы G_{11}. Эта матрица является порождающей матрицей двоичного кода Голея.

Обозначим через E_{11} единичную (11x11)-матрицу, через J_{11} — (11x1)-матрицу-столбец из единиц, через O_{11} — (11x1)-матрицу-столбец из нулей и построим (11x24)-матрицу

$$C = \{E_{11} J_{11} G_{11} O_{11}\}.$$

11 строк матрицы C рассмотрим как координатные строки векторов соответственно $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_{11}$.

В 24-мерном евклидовом пространстве E^{24} зададим прямоугольную декартову систему координат; координатную строку точек и векторов от-

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS и РФФИ (грант 05-01-00170).

носительно заданной системы координат обозначим через $(x^1, x^2, ..., x^{24})$. Вторую совершенную решетку Вороного Γ_1^{24} в пространстве E^{24} будем рассматривать, как это часто принято, как множество всех целочисленных точек, координаты которых $x^1, x^2, ..., x^{24}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{24} x^i \equiv 0 \pmod 2.$$

Наряду с L-многогранниками другого вида [4], L-многогранниками решетки Γ_1^{24} являются все правильные 24-мерные ортаэдры (аналоги 3-мерного правильного октаэдра) с центрами во всех таких целочисленных точках, сумма координат которых сравнима по модулю 2 с единицей. Отметим, что длина ребер ортаэдров равна $\sqrt{2}$ — длине минимального вектора решетки.

Известную решетку Лича Λ^{24} (см., напр., [3, 5, 6]) рассмотрим как центрировку решетки Γ_1^{24}. Эту центрировку зададим минимальной базой [2], составленной из 12 следующих векторов: 11 векторов $\alpha_j = \frac{1}{2}\bar{a}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, 11)$ образованы из векторов $\bar{a}_j$ умножением на $\frac{1}{2}$ каждый, а двенадцатый вектор α_{12} получен умножением на $\frac{1}{4}$ из целочисленного вектора $\bar{a}_{12}$, у которого координата $x^{12} = -3$, а остальные координаты равны 1. Названную выше центрировку обозначим через C^{24}.

Складывая между собой векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{11}$, получаем 2047 векторов, координатные строки которых (если не учитывать множитель $\frac{1}{2}$) состоят из нулей и единиц (которых 8, 12 или 16). Прибавив к каждому из этих векторов вектор α_{12}, получим список определяющих векторов центрировки C^{24}.

Таким образом, решётка C^{24} имеет вид

$$\Gamma_1^{24} + \sum_{j=1}^{11} k^j \alpha_j + k^{12}\alpha_{12},$$

где коэффициенты $k^1, \ldots, k^{12}$ пробегают независимо друг от друга множество целых чисел.

Длина минимального вектора решетки Γ_1^{24} осталась той же самой и для её центрировки C^{24}. Следовательно, центрировка является *допустимой* [2] (впрочем, для нас это свойство центрировки несущественно).

При названном выше способе задания решетки Γ_1^{24} объем основного параллелепипеда этой решетки равен $V(\Gamma_1^{24}) = 2$, и, следовательно, объем основного параллелепипеда центрировки равен $V(C^{24}) = 2 \cdot \frac{1}{2^{11} \cdot 4} = \frac{1}{2^{12}}$.

Предложение 1. *Центрировка C^{24} является решеткой Лича Λ^{24}.*

Справедливость предложения 1 устанавливается сравнением центрировки с решеткой Лича по описанию последней, например, в [3, 5, 6].

§ 2. Первичные элементы L-разбиения решеток (общие сведения)

Пусть Γ — решетка пространства E^n, заданная репером $E = \{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$. Через $\bar{j} = (\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n)$ обозначим индекс четности — координатную строку, составленную из нулей и единиц. Примитивные векторы решетки (т. е. целые векторы, для координат $x^1, ..., x^n$ которых НОД$(x^1, ..., x^n) = 1$) разбиваются по индексам четности на $2^n - 1$ классов четности $\{J\}$. Вектор $\bar{x} = (x^1, ..., x^n)$ принадлежит классу четности J с индексом четности $\bar{j} = (\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n)$ тогда и только тогда, когда

$$x^i \equiv \varepsilon^i \pmod 2, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Известно, что примитивный вектор тогда и только тогда задает ребро разбиения, когда на своем классе четности он является единственным (с точностью до знака) вектором наименьшей длины. Если же на данном классе четности множество векторов минимальной длины состоит из k векторов: $\pm\bar{g}_1, ..., \pm\bar{g}_k$, то L-разбиение решетки содержит p-мерную грань ($p \leq k$), представляющую собой многогранник, у которого имеется в точности $2k$ вершин и k диагоналей, определяемых векторами $\bar{g}_1, ..., \bar{g}_k$. Эти диагонали пересекаются в общей точке, в которой каждая из них делится пополам. Грани L-разбиения, о которых говорилось выше (т. е. грани, заданные на каждом классе четности минимальными векторами этого класса), названы [1] *первичными элементами* L-разбиения решетки.

Заметим [1], что диагоналями L-многогранников и их граней всех размерностей являются диагонали первичных элементов и только они.

Названные выше свойства первичных элементов показывают, насколько знание их существенно для отыскания L-разбиений решеток.

§ 3. Первичные элементы L-разбиения решетки Лича (решетки C^{24})

Решетку Лича ниже рассматриваем как решетку C^{24}.

При размерности 24 количество классов четности равно $2^{24} - 1 = 16\,777\,215$.

Все минимальные векторы решетки являются и её векторами смежности и соответствуют первичным элементам. Для центрировки C^{24} имеем

Предложение 2. *Множество минимальных векторов решетки C^{24}, т. е. векторов длины $\sqrt{2}$, состоит из 196 560 векторов, которые распадаются на следующие три подмножества:*

1) *1 104 целых вектора вида* $(\pm 1^2, 0^{22})$*;*
2) *97 152 вектора со знаменателем 2; это векторы видов*

$$\pm\frac{1}{2}(1^8, 0^{16}), \pm\frac{1}{2}(-1^2, 1^6, 0^{16}), \frac{1}{2}(-1^4, 1^4, 0^{16});$$

3) *98 304 вектора со знаменателем 4; это векторы видов*

$$\pm\frac{1}{4}(1^{23}, -3^1), \pm\frac{1}{4}(-1^p, 1^{23-p}, -3^1), \quad p = 8, 12, 16.$$

Как следует из предложения 2, минимальные векторы решетки определяют $\frac{1}{2} \cdot 196\,560 = 98\,280$ векторов смежности.

Предложение 3. *Множество векторов решетки C^{24} длины $\sqrt{3}$ состоит из векторов следующих видов:*

1) $\frac{1}{2}(\pm 1^8, \pm 2^1, 0^{15})$ — *всего 3 108 864 штук,*
2) $\frac{1}{2}(\pm 1^{12}, 0^{12})$ — *всего 5 275 648 штук,*
3) $\frac{1}{4}(\pm 1^{23}, \pm 5^1)$ — *всего 98 304 штуки,*
4) $\frac{1}{4}(\pm 1^{21}, \pm 3^3)$ — *всего 8 290 304 штуки.*

Все названные векторы с точностью до знака определяют векторы смежности решетки — всего $\frac{1}{2} \cdot 16\ 773\ 120 = 8\ 386\ 560$ *векторов смежности.*

Кроме ребер L-разбиения, о которых говорилось в предложениях 2 и 3 и которые определяют всего 8 484 840 первичных элементов — векторов смежности, первичными элементами решетки C^{24} являются 24-мерные ортаэдры.

Чтобы вычислить первичные элементы для оставшихся 16 777 215 – 8 484 840 = 8 292 375 классов четности, найдём множество векторов решетки C^{24} длины 2 — третьей (после $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$) длины векторов решетки Лича.

Предложение 4. *Всего векторов длины 2 решетки Лича* $48 \cdot 5^3 \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 13 = 48 \cdot 8\,292\,375$ *(ср. [3], с. 173). Они принадлежат следующим 8 видам:*

1) $(\pm 2^1, 0^{23})$ — *48;*
2) $(\pm 1^4, 0^{20})$ — *170 016 = 5 313*$\cdot 2^5$*;*
3) $\frac{1}{2}(\pm 1^8, \pm 2^2, 0^{14})$ — $759 \cdot 15 \cdot 2^{12}$*;*
4) $\frac{1}{2}(\pm 1^{16}, 0^8)$ — *759*$\cdot 2^{15}$*;*
5) $\frac{1}{2}(\pm 1^7, \pm 3^1, 0^{16})$ — *777 216 = 759*$\cdot 2^{10}$*;*
6) $\frac{1}{2}(\pm 1^{12}, \pm 2^1, 0^{11})$ — *483*$\cdot 2^{18}$*;*
7) $\frac{1}{4}(\pm 1^{19}, \pm 3^5)$ — *5 313*$\cdot 2^{15}$*;*
8) $\frac{1}{4}(\pm 1^{21}, \pm 3^2, \pm 5^1)$ — *759*$\cdot 2^{15}$.

Середина каждого из отрезков, соответствующих векторам решетки длины 2 с началом в точке $(0, 0, ..., 0)$, является центром L-ортаэдра, входящего в звезду L-разбиения для точки $(0, 0, ..., 0)$. Так как каждый из этих 24-мерных ортаэдров имеет 48 вершин, то есть звезда содержит по 48 копий каждого ортаэдра, то всего попарно негомологичных относительно решетки имеется 8 292 375 ортаэдров, которые образуют множество отличных от рёбер L-разбиения первичных элементов решетки Лича.

Как итог этого параграфа, формулируем теорему:

Теорема 1. *Множество первичных элементов L-разбиения решетки Лича состоит из векторов смежности длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ (соответственно 98 280 и 8 386 560 штук) и 24-мерных ортаэдров (8 292 375 штук).*

§ 4. Об *L*-многогранниках решетки Лича

Как следует из теоремы 1, ортаэдры являются единственными многогранниками L-разбиения решетки Лича, имеющими диагонали. Остальные многогранники разбиения — это многогранники без диагоналей, одномерный остов каждого из которых образован ребрами длиной $\sqrt{2}$ и длиной $\sqrt{3}$.

Для 24-мерного ортаэдра объем равен $\frac{2^{24}}{24!}$. Объем параллелепипеда, построенного на базисе из ребер ортаэдра, равен 2. Так как объем основного параллелепипеда центрировки C^{24} равен, как было установлено выше, $\frac{1}{2^{12}}$, то объем названного параллелепида превышает объем основного параллелепипеда в 2^{13} раз.

Радиус описанного вокруг L-ортаэдра решетки C^{24} шара равен 1, что совпадает с радиусом покрытия для решетки C^{24} (см. [3, с. 172]).

Назовем ребра L-многогранника *длинными*, если их длина равна $\sqrt{3}$. Рёбра длины $\sqrt{2}$ будем называть *короткими*. Пользуясь тем, что радиус описанной вокруг любого многогранника L-разбиения решётки Лича не может превышать 1, доказываем следующую лемму.

Лемма. *1. Количество длинных ребер, выходящих из одной вершины многогранника и расположенных в одной 2-плоскости, не превышает 4. Если из какой-либо вершины выходит 4 длинных ребра, то из вершин, являющихся концами этих ребер, не выходит больше ни одного длинного ребра.*

2. Если длинные ребра образуют замкнутый треугольник, то из вершин этого треугольника не выходит, кроме сторон треугольника, других длинных ребер, расположенных в 2-плоскости этого треугольника.

3. Если длинные ребра образуют плоский замкнутый многоугольник, то центр описанной вокруг многогранника сферы является центром этого многоугольника, а её радиус равен 1.

Рассматриваем один из L-ортаэдров звезды решетки C^{24}. Выбран ортаэдр O_{24} с центром $(0,0,...,0,1)$, с вершинами в 46 точках решетки $(0,...,0,\varepsilon_i,0,...,0,1)$, где $i=1,2,...,23$, а $\varepsilon_i=\pm 1$. Две последние вершины (из 48) ортаэдра — точки $(0,...,0)$ и $(0,...,0,2)$.

Далее рассматриваем все гиперграни ортаэдра O_{24}, проходящие через точку $(0,...,0)$. Количество таких гиперграней, каждая из которых — правильный 23-мерный симплекс с ребрами длиной $\sqrt{2}$, равно $2^{23}=8388608$. Пользуясь леммой и другими следствиями того факта, что радиус описанной вокруг L-многогранника сферы не превосходит 1, найдено полное множество таких многогранников, смежных по гиперграням с выбранным выше ортаэдром, а следовательно, и все виды L-многогранников решетки Лича, смежных по гиперграням с ортаэдрами.

Обозначим через S_0, S_1, S_2, S_3 соответственно 24-мерные симплексы, у которых 0, 1, 2, 3 длинных ребра, остальные рёбра короткие, причём длинные ребра выходят из одной вершины и расположены в одной 2-плоскости. Объемы параллелепипедов, построенных на этих симплексах, превосходят объем основного параллелепипеда решётки Лича соответственно в $5\cdot 2^{12}$, $9\cdot 2^{11}$, $4\cdot 2^{12}$, $7\cdot 2^{11}$ раз, а радиусы описанных вокруг них сфер соответственно равны $\sqrt{\frac{24}{25}}$, $\sqrt{\frac{26}{27}}$, $\sqrt{\frac{31}{32}}$, $\sqrt{\frac{48}{49}}$.

Через $P(30)$ обозначим бездиагональный 30-вершинный многогранник, у которого 24 длинных ребра, по 4 штуки исходящие из 6 вершин, остальные ребра короткие. Радиус описанной вокруг него сферы равен 1, объем построенного на его основе параллелепипеда в $3 \cdot 2^{12}$ раз больше объема основного параллелепипеда решётки Лича.

Предложение 5. *По гиперграням с ортаэдрами L-разбиения решетки Лича смежны 4 вида 24-мерных L-симплексов: симплексы видов S_0, S_1, S_2, S_3 и L-многогранники вида $P(30)$.*

Количество входящих в звезду L-разбиения и смежных с данным ортаэдром симплексов S_0, S_1, S_2, S_3 равно соответственно 2^{11} = 2 048, 1 771 $\cdot 2^{11}$ = 49 152, 69 $\cdot 2^{13}$ = 565 248, 253 $\cdot 2^{14}$=4 145 152, а многогранников вида $P(30)$ — 1 771 $\cdot 2^{11}$ = 3 627 008.

Исследование других многогранников L-разбиения решетки Лича, на котором мы здесь не останавливаемся, позволило сделать вывод, что среди них не существует таких, совокупность вершин которых определяла бы основной базис решетки.

Библиографический список

1. *Барановский Е. П.* Разбиения евклидовых пространств на L-многогранники некоторых совершенных решёток // Тр. МИАН СССР. М., 1991. Т. 196. С. 27—46.
2. *Захарова (Новикова) Н. В.* Центрировки 8-мерных решёток, сохраняющие репер последовательных минимумов // Тр. МИАН СССР. М., 1980. Т. 152. С. 97—123.
3. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. М., 1990. Т. 1. 413 с.
4. *Рышков С. С., Шушбаев С. Ш.* Строение L-разбиения для второй совершенной решетки // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 2. С. 218—231.
5. *Leech J.* Some sphere packing in higher space // Can. J. Math. 1964. Vol. 16. № 4. P. 657—682.
6. 6. *Leech J.* Notes on sphere packings // Can. J. Math. 1967. Vol. 19. № 2. P. 251—267.