Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2005 С. 73 – 83

А. С. Белов

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ РАВНОМЕРНОЙ НОРМЫ ЧАСТНЫХ СУММ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

Получена точная оценка снизу равномерной нормы частных сумм неотрицательного тригонометрического полинома через норму самого полинома.

A sharp lower estimate of the uniform norm of the partial sums of a nonnegative trigonometrical polynomial in terms of the norm of this polynomial is obtained.

УДК 517.5.

§ 1. Введение

В статье [1, теорема 3] автором доказано, что если тригонометрический полином с действительными коэффициентами

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx) \right), \tag{1}$$

где n — целое неотрицательное число, является неотрицательным, т. е.

$$S_n(x) \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad x\,, \tag{2}$$

и

$$S_m(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{m} \left(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx) \right), \quad m = 0, \ldots, n\,, \tag{3}$$

— частные суммы тригонометрического полинома (1), то для любого $m = 0, \ldots, n$ справедлива оценка

$$\frac{\| S_n \|_\infty}{n+1} \leqslant C\, \frac{\| S_m \|_\infty}{m+1}\,, \tag{4}$$

где равномерная норма определяется обычным образом:

$$\|S_n\|_\infty = \max_x |S_n(t)|\,,$$

а положительная абсолютная постоянная $C = 9$. Естественно возникает вопрос о наименьшей абсолютной неотрицательной постоянной C, для которой при указанных выше условиях верно неравенство (4).

Основной целью этой статьи является подробное доказательство следующей теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00052).

Теорема 1. *Для любого целого неотрицательного числа* n *и произвольного неотрицательного тригонометрического полинома* (1) *для частных сумм* (3) *полинома* (1) *при всех* $m = 0, \ldots, n$ *справедлива оценка*

$$\frac{\| S_n \|_\infty}{n+1} \leqslant 2 \, \frac{\| S_m \|_\infty}{m+1} \, . \tag{5}$$

Таким образом, будет доказано, что в неравенстве (4) можно взять $C = 2$, причем приводимое доказательство существенно отлично от доказательства неравенства (4) из статьи [1].

Отметим, что для неотрицательного тригонометрического полинома (1) свободный член a_0 обязательно неотрицателен и $(\, a_j^2 + b_j^2 \,)^{1/2} \leqslant 2a_0$ при всех $j = 1, \ldots, n$. Более того, хотя нам это далее и не потребуется, хорошо известна (см. [3, отд. 6, § 7, задача 52]) точная оценка Фейера

$$\max_{j=1,\ldots,n} (\, a_j^2 + b_j^2 \,)^{1/2} \leqslant 2 \cos\Big(\frac{\pi}{n+2} \Big) \, a_0 \, .$$

При заданных целых неотрицательных числах n и $m = 0, \ldots, n$ возьмем произвольный неотрицательный тригонометрический полином вида

$$U_{n,m}(x) = a_0 + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \, \cos(jx) \tag{6}$$

и в неравенстве (4) положим $S_n = U_{n,m}$. Тогда $a_0 \geqslant 0$ и

$$\frac{U_{n,m}(0)}{n+1} \leqslant \frac{\| U_{n,m} \|_\infty}{n+1} \leqslant C \, \frac{\| S_m \|_\infty}{m+1} = C \, \frac{a_0}{m+1} \, .$$

В частности, отсюда при $m < n$, $a_0 = 1$, $a_j \geqslant 0$ при всех $j = m+1, \ldots, n$, $\sum_{j=m+1}^{n} a_j = 1$, поскольку в этом случае полином (6) будет неотрицательным, имеем

$$C \geqslant \frac{2(m+1)}{n+1} \, . \tag{7}$$

Таким образом, из (4) при $m < n$ получается оценка (7), например, для неотрицательных полиномов $S_n(x) = 1 + \cos(nx)$, или

$$S_n(x) = 1 + (n-m)^{-1} \sum_{j=m+1}^{n} \cos(jx) \, .$$

Поскольку постоянная C в неравенстве (4) является абсолютной, то (7) верно и при $m = n - 1$, т. е. $C \geqslant 2n/(n+1)$ при всех натуральных n. Отсюда следует, что в неравенстве (4) абсолютная постоянная C всегда удовлетворяет условию $C \geqslant 2$. Поэтому в неравенстве (5) абсолютная постоянная является наилучшей.

Для доказательства неулучшаемой оценки (5) мы сначала рассмотрим следующую экстремальную задачу:

для заданных целых чисел $n \geqslant m \geqslant 0$ оценить наименьшую возможную постоянную K_n^m такую, что для любого неотрицательного тригонометрического полинома вида (6) верна оценка

$$U_{n,m}(0) \leqslant K_n^m \, a_0 \, , \tag{8}$$

т. е. оценить величину

$$K_n^m = \max\left\{ 1 + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \;:\; 1 + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \cos(jx) \geqslant 0 \;\text{ при всех }\; x \right\}. \quad (9)$$

Из этого определения ясно, что $K_n^n = 1$ при всех $n \geqslant 0$.

Поскольку при $n > m$ множество векторов $(a_{m+1}, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n-m}$ таких, что полином $1 + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \cos(jx) \geqslant 0$ при всех x, образует компакт в $\mathbf{R}^{n-m}$, то максимум в (9), как максимум непрерывной функции на компакте, существует. Для полинома $U_{n,m}(x) = 1 + \cos(nx)$ из (8), или (9), имеем

$$K_n^m \geqslant 2 \quad \text{при всех} \quad n > m \geqslant 0\,. \quad (10)$$

Из (8) при $n > m$ также ясно, что

$$\frac{1}{K_n^m - 1} = \min a_0\,, \quad (11)$$

где минимум берется по всем неотрицательным тригонометрическим полиномам вида

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(jx) \quad (12)$$

таким, что

$$a_j = 0 \quad \text{при всех} \quad j = 1, \dots, m \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j = 1\,. \quad (13)$$

Экстремальная задача (11) является задачей о минимуме свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома (12) при условиях (13) на его коэффициенты, т. е. относится к виду задач, описанному нами в работе [2]. Отметим, что по известной теореме Фейера (см. [3, отд. 6, § 7, задача 50]) для неотрицательного тригонометрического полинома (12) справедлива неулучшаемая оценка $T_n(0) \leqslant (n+1)\, a_0$. Поэтому из (8), или (9), или (11), следует, что $K_n^m \leqslant n + 1$ при всех $n \geqslant m \geqslant 0$ и

$$K_n^0 = n + 1 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 0\,. \quad (14)$$

Из (9) очевидно, что $K_n^m \leqslant K_{n+1}^m$ для всех целых неотрицательных чисел $n \geqslant m$ и $K_n^m \leqslant K_n^{m-1}$ для всех натуральных $n \geqslant m$.

В § 2 будет доказана

Лемма 1. *Для любых целых неотрицательных чисел* $n \geqslant m$ *и произвольного неотрицательного тригонометрического полинома* (1) *для частных сумм* (3) *полинома* (1) *справедлива оценка*

$$\| S_n \|_\infty \leqslant K_n^m \, \| S_m \|_\infty \quad (15)$$

с неулучшаемой, для заданных n *и* m, *постоянной.*

Затем в § 3 будут получены следующие две леммы.

Лемма 2. *Для любых целых чисел* $n \geqslant m \geqslant 0$ *верна оценка*

$$K_n^m \leqslant \frac{n+m+1}{m+1} \,. \tag{16}$$

Лемма 3. *Для любых целых чисел* $n \geqslant m \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$K_n^m \geqslant \Big[\, \frac{n+m+1}{m+1} \, \Big] \,. \tag{17}$$

В (17) и далее квадратные скобки всегда обозначают операцию взятия целой части от числа, заключенного в них.

При $m = 0$ оценки (16) и (17) дают известный результат Фейера (14).

Наконец, в § 4 из лемм 1 и 2 будет получена теорема 1.

Экстремальная задача (9) при $m = 0$ была решена Фейером. Из изложенного ясно, что она представляет интерес при всех целых неотрицательных числах $n > m$. В замечании 1 в конце настоящей статьи автор без доказательства приводит некоторые другие результаты, относящиеся к этой задаче, которые удалось получить.

Теперь переходим к изложению доказательств сформулированных выше результатов.

§ 2. Доказательство и обсуждение леммы 1

Будем далее считать целые неотрицательные числа $n \geqslant m$ фиксированными. Если $m = n$, то неулучшаемая постоянная в неравенстве (15) равна $1 = K_n^n$. Поэтому далее считаем, что $n > m$.

Доказательство оценки (15). Возьмем произвольный неотрицательный тригонометрический полином (1). Тогда из условия (2) при всех действительных x имеем

$$V_{n,m}(x) = \| \, S_m \, \|_\infty + \sum_{j=m+1}^{n} \big(\, a_j \, \cos(jx) + b_j \, \sin(jx) \, \big) \geqslant S_n(x) \geqslant 0 \,.$$

Поэтому при фиксированном произвольном действительном x полином

$$U_{n,m}(h) = \| \, S_m \, \|_\infty + \sum_{j=m+1}^{n} \big(\, a_j \, \cos(jx) + b_j \, \sin(jx) \, \big) \cos(jh) =$$
$$= (V_{n,m}(x+h) + V_{n,m}(x-h))/2 \geqslant 0 \,.$$

Отсюда и из (8) получаем оценку

$$S_n(x) \leqslant V_{n,m}(x) = U_{n,m}(0) \leqslant K_n^m \, \| \, S_m \, \|_\infty \,.$$

В силу произвольности x последняя оценка приводит к неравенству (15).

Доказательство неулучшаемости оценки (15). Возьмем произвольный неотрицательный полином (6) и в оценке (15) положим $S_n = U_{n,m}$. Поскольку $a_0 \geqslant 0$, то получим неравенство

$$\| \, U_{n,m} \, \|_\infty \leqslant K_n^m \, a_0 \,.$$

Следовательно, верна оценка (8). Таким образом, оценки (15) и (8) эквивалентны, а постоянная K_n^m в оценке (8) по определению является наилучшей. Это означает, что и в оценке (15) при каждых фиксированных n и m постоянная является наилучшей. Лемма 1 полностью доказана.

Итак, хотя оценка (8) является частным случаем неравенства (15) и относится только к неотрицательным полиномам вида (6), лемма 1 показывает, что наилучшие постоянные в неравенствах (8) и (15) совпадают. Пусть $p \in [1, \infty)$. Для функции $f \in L_{2\pi}^p$, как обычно, обозначаем

$$\|f\|_p = \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \Big)^{1/p} .$$

Тогда для произвольного неотрицательного тригонометрического полинома (1) из неравенства (15), примененного к неотрицательному полиному

$$S_n(p, x) = \int_0^{2\pi} |S_n(t)|^{p-1} \, S_n(x+t) \, dt \, ,$$

имеем

$$\begin{aligned} &\|S_n\|_p^p = S_n(p, 0) \leqslant \\ \leqslant &K_n^m \, \max_x \Big| \int_0^{2\pi} |S_n(t)|^{p-1} \, S_m(x+t) \, dt \Big| \leqslant K_n^m \, \|S_n\|_p^{p-1} \, \|S_m\|_p \, . \end{aligned}$$

Следовательно, верно неравенство

$$\|S_n\|_p \leqslant K_n^m \, \|S_m\|_p \tag{18}$$

для любого неотрицательного тригонометрического полинома (1) и любого $p \in [1, \infty]$. Хотя неравенство (18) нам далее не потребуется, оно является естественным обобщением оценки (15).

§ 3. Доказательство лемм 2 и 3

Пусть произвольные целые неотрицательные числа $n > m$ зафиксированы. Далее нам будет нужна следующая

Лемма 4. *Пусть τ — произвольное натуральное число,*

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_\tau \leqslant \pi \tag{19}$$

и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\tau}$ — любые неотрицательные числа такие, что

$$\sum_{k=1}^{\tau} \lambda_k \, \cos(j x_k) = -1 \quad \text{\textit{при всех}} \quad j = m+1, \ldots, n \, . \tag{20}$$

Тогда для любого неотрицательного тригонометрического полинома (6) *верны оценки*

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{\tau} \lambda_k \, U_{n,m}(x_k) = a_0 \sum_{k=1}^{\tau} \lambda_k - \sum_{j=m+1}^{n} a_j \tag{21}$$

и

$$K_n^m \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\tau} \lambda_k \,. \tag{22}$$

Доказательство. Для полинома (6) имеем

$$\sum_{k=1}^{\tau} \lambda_k \, U_{n,m}(x_k) = a_0 \sum_{k=1}^{\tau} \lambda_k + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{\tau} \lambda_k \, \cos(jx_k) \,. \tag{23}$$

Отсюда и из (20) сразу получаем оценку (21), а из (21) и (9) сразу вытекает оценка (22). Лемма 4 полностью доказана.

Отметим, что равенство в (22) возможно только тогда, когда для некоторого неотрицательного полинома

$$U^*_{n,m}(x) = a^*_0 + \sum_{j=m+1}^{n} a^*_j \, \cos(jx) \tag{24}$$

вида (6) с $a^*_0 = 1$ все числа x_k, которым соответствуют числа $\lambda_k > 0$, являются нулями полинома $U^*_{n,m}$.

Отметим также, что если неотрицательный полином (24) с $a^*_0 = 1$ является экстремальным для экстремальной задачи (9), то $U^*_{n,m}(0) = K_n^m$ и полином $U^*_{n,m}$ имеет хотя бы один нуль. Пусть числа (19) — это все различные нули экстремального полинома $U^*_{n,m}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ в порядке возрастания и $x_0 = 0$. Тогда выпуклая оболочка векторов

$$X_k = (\, \cos(jx_k) \,)_{j=m+1}^{n} \,, \quad k = 0, \ldots, \tau \,,$$

содержит нулевой вектор, так как в противном случае по известной теореме отделимости существовал бы такой ненулевой вектор $(\, b_j \,)_{j=m+1}^{n}$, что

$$\sum_{j=m+1}^{n} b_j \, \cos(jx_k) > 0 \quad \text{при всех} \quad k = 0, \ldots, \tau \,,$$

а тогда полином

$$U_{n,m}(x) = U^*_{n,m}(x) + \varepsilon \sum_{j=m+1}^{n} b_j \, \cos(jx)$$

был бы положительным при малых положительных ε и одновременно выполнялось бы неравенство $U_{n,m}(0) > K_n^m$, что противоречит определению (9). Поэтому существуют неотрицательные числа $\{\hat\lambda_k\}_{k=0}^{\tau}$, не все равные нулю и такие, что $\sum_{k=0}^{\tau} \hat\lambda_k \, X_k = 0$. Если предположить, что $\hat\lambda_0 = 0$, то из равенства (23) будет вытекать, что

$$0 = \sum_{k=1}^{\tau} \hat\lambda_k \, U^*_{n,m}(x_k) = a^*_0 \sum_{k=1}^{\tau} \hat\lambda_k = \sum_{k=0}^{\tau} \hat\lambda_k \,,$$

а это противоречит условию $\sum_{k=0}^{\tau} \hat\lambda_k > 0$. Следовательно, $\hat\lambda_0 > 0$ и для неотрицательных чисел $\lambda_k = \hat\lambda_k / \hat\lambda_0$, $k = 1, \ldots, \tau$, верны равенства (20) и в оценке (22) реализуется случай равенства. Поэтому существуют такие числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\tau}$ и $\{x_k\}_{k=1}^{\tau}$, которые удовлетворяют лемме 4 и для которых оценка (22) превращается в равенство.

Далее будем для краткости использовать обозначение

$$N = n + m + 1, \quad q = [\,N/2\,]. \tag{25}$$

Через $\mathbb{W}_m$ будем обозначать совокупность всех тригонометрических полиномов

$$w_m(x) = \sum_{\nu=0}^{m} 2\alpha_\nu \cos(\nu x) \tag{26}$$

с действительными коэффициентами таких, что

$$w_m(0) > 0 \quad \text{и} \quad w_m\Big(\frac{2\pi k}{N}\Big) \geqslant 0 \ \text{ при всех } \ k = 1, \ldots, q\,. \tag{27}$$

Пусть

$$s_k = 1 \ \text{ при } \ k = 1, \ldots, \Big[\frac{N-1}{2}\Big]; \quad s_q = 0, \ \text{ если } \ N \ \text{— четное.} \tag{28}$$

Лемма 5. *Для любого тригонометрического полинома* (26) *верно равенство*

$$w_m(0) + \sum_{k=1}^{q} (1+s_k)\, w_m\Big(\frac{2\pi k}{N}\Big) \cos\Big(j\frac{2\pi k}{N}\Big) =$$
$$= \begin{cases} 0 & \textit{при} \ \ j = m+1, \ldots, n\,, \\ 2N\alpha_0 & \textit{при} \ \ j = 0\,. \end{cases}$$

Доказательство. При целых j из (25), (26) и (28) имеем

$$w_m(0) + \sum_{k=1}^{q} (1+s_k)\, w_m\Big(\frac{2\pi k}{N}\Big) \cos\Big(j\frac{2\pi k}{N}\Big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} w_m\Big(\frac{2\pi k}{N}\Big) \cos\Big(j\frac{2\pi k}{N}\Big) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \sum_{k=0}^{N-1} \Big(\cos\Big((\nu+j)\,\frac{2\pi k}{N}\Big) + \cos\Big((\nu-j)\,\frac{2\pi k}{N}\Big)\Big).$$

Осталось заметить, что для целых чисел ν сумма

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos\Big(\nu\frac{2\pi k}{N}\Big) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ \nu \ \text{ не делится на } \ N\,, \\ N, & \text{если } \ \nu \ \text{ делится на } \ N\,. \end{cases}$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для любого тригонометрического полинома* $w_m \in \mathbb{W}_m$ *вида* (26) *справедлива оценка*

$$K_n^m \leqslant N\,\frac{2\alpha_0}{w_m(0)}\,. \tag{29}$$

Доказательство. В силу (27) и леммы 5 числа

$$\tau = q\,,\quad x_k = \frac{2\pi k}{N}\,,\quad \lambda_k = \frac{(1+s_k)}{w_m(0)}\,w_m\Bigl(\frac{2\pi k}{N}\Bigr)\ \text{ при }\ k=1,\dots,q$$

удовлетворяют лемме 4. Из (22) получаем

$$K_n^m \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\tau}\lambda_k = N\,\frac{2\alpha_0}{w_m(0)}\,.$$

Оценка (29) доказана.

Далее через

$$F_\nu(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\nu}\Bigl(1-\frac{k}{\nu+1}\Bigr)\cos(kx)\,,\quad \nu=0,1,\dots\,, \tag{30}$$

будем обозначать ядро Фейера. Хорошо известно, что оно неотрицательно и $F_\nu(0) = (\,\nu+1)/2$.

Доказательство леммы 2. В лемме 6 положим $w_m = F_m$ — ядро Фейера. Тогда условия (27) выполнены, из (26) и (30) имеем $2\alpha_0 = 1/2$ и из (29) получаем $K_n^m \leqslant N/(m+1)$. Этим в силу (25) оценка (16) доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть $\nu = [N/(m+1)\,]$. Тогда

$$U_{n,m}(x) = 2F_{\nu-1}((m+1)x) = 1 + \sum_{k=1}^{\nu-1} 2\Bigl(1-\frac{k}{\nu}\Bigr)\cos(k(m+1)x)$$

является неотрицательным полиномом вида (6). Из (8) получаем $K_n^m \geqslant U_{n,m}(0) = 2F_{\nu-1}(0) = \nu$. Этим доказана оценка (17).

§ 4. Доказательство теоремы 1

Из (16) по лемме 2 имеем $K_n^m \leqslant (2n+1)/(m+1) < 2(n+1)/(m+1)$. Отсюда и из неравенства (15) немедленно получаем оценку (5). Теорема 1 полностью доказана.

Отметим, что из оценок (16) и (17) следует, что

$$K_n^m = \frac{n+m+1}{m+1}\,,\qquad \text{если}\ \ n\ \ \text{делится на}\ \ m+1\,. \tag{31}$$

Замечание 1. Из изложенного видно, что экстремальная задача (9), которая при $m=0$ была решена Фейером, представляет интерес при всех целых числах $n \geqslant m \geqslant 0$. Без доказательства отметим в этом замечании некоторые другие результаты, относящиеся к этой экстремальной задаче, которые также удалось получить, но которые не потребовались для доказательства теоремы 1.

Прежде всего, удалось доказать, что для любых целых чисел $n \geqslant m \geqslant 0$ экстремальный полином (24) для задачи (9) с $a_0^* = 1$ является единственным. Более того, этот экстремальный полином в задаче (9) в обозначениях (25) и (30) всегда имеет вид

$$U_{n,m}^*(x) = \sum_{k=0}^{m} \theta_k \left(F_{n+m}\Big(x + \frac{2\pi\nu_k}{N}\Big) + F_{n+m}\Big(x - \frac{2\pi\nu_k}{N}\Big) \right),$$

где целые числа $\{\nu_k\}_{k=0}^m$ удовлетворяют условию $0 = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_m \leqslant q$, причем $\nu_{2k} - \nu_{2k-1} = 1$ при всех $k = 1, \dots, [m/2]$, а действительные неотрицательные числа $\{\theta_k\}_{k=0}^m$ удовлетворяют условиям

$$\theta_0 > 0\,, \quad \sum_{k=0}^{m} \theta_k = 1\,, \quad \sum_{k=0}^{m} \theta_k \cos\Big(j\frac{2\pi\nu_k}{N}\Big) = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, m\,.$$

Можно также показать , что $K_n^m = \theta_0\,(n+m+1)$ и всегда верно равенство

$$K_n^m = \min\Big\{ \frac{(n+m+1)}{w_m(0)}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_m(t)\,dt \,:\, w_m \in \mathbb{W}_m \Big\}.$$

В частности, в случае (31) единственный экстремальный полином

$$U_{n,m}^*(x) = 2F_{\nu-1}((m+1)x)\,, \quad \text{где} \quad \nu = (n+m+1)/(m+1)\,.$$

Наконец, можно также в дополнение к (10), (14) и (31) показать , что

$$K_n^1 = (n+2)\left(1 - \left(1 - \cos\Big(\frac{2\pi[(n+2)/2]}{n+2}\Big)\right)^{-1}\right), \; K_n^{n-1} = 2\,, \; n \geqslant 1\,,$$

$$K_n^2 = (n+3)\, \frac{(1 + 2\cos y_1\, \cos y_2)}{2(1-\cos y_1)(1-\cos y_2)}\,,$$
$$\text{где} \;\; y_1 = \frac{2\pi}{(n+3)} \Big[\frac{n+3}{3} \Big]\,, \; y_2 = y_1 + \frac{2\pi}{(n+3)}\,, \; n \geqslant 2\,,$$

$$K_n^{n-2} = 1 + \left(\cos\Big(\frac{\pi}{2n-1}\Big)\right)^{-1}, \; n \geqslant 2\,,$$

$$K_n^{n-3} = 2 + 2\Big(1 - \cos\Big(\frac{\pi}{n-1}\Big)\Big)\left(\cos\Big(\frac{\pi}{n-1}\Big) - \cos\Big(\frac{2\pi[(n-1)/2]}{n-1}\Big)\right)^{-1},$$

где $n \geqslant 3$. Конечно, во всех этих случаях найдены и экстремальные полиномы. Более того, положим

$$w_m^*(x) = \prod_{k=1}^{m} \left(\cos x - \cos\Big(\frac{2\pi}{N}\Big[\frac{Nk}{m+1}\Big]\Big)\right).$$

Тогда оказывается, что этот тригонометрический полином степени m имеет положительные коэффициенты, $w_m^* \in \mathbb{W}_m$ и

$$K_n^m = \frac{N}{w_m^*(0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_m^*(t)\,dt =$$
$$= \frac{N}{w_m^*(0)(m+1)} \sum_{k=0}^{m} w_m^*\Big(\frac{2\pi k}{m+1}\Big) = \frac{1}{w_m^*(0)} \sum_{k=0}^{N-1} w_m^*\Big(\frac{2\pi k}{N}\Big).$$

Эта общая формула при всех $n > m \geqslant 0$ и $n_1 > m_1 \geqslant 0$ позволяет доказать, что если

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m_1+1}{n_1}, \quad \text{то} \quad K_n^m = K_{n_1}^{m_1},$$

а если

$$\frac{m+1}{n} < \frac{m_1+1}{n_1}, \quad \text{то} \quad K_n^m > K_{n_1}^{m_1}.$$

Отсюда также следует, что всегда можно взять

$$\nu_{2k-1} = \Big[\frac{Nk}{m+1}\Big] \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, \Big[\frac{m+1}{2}\Big],$$

$$\nu_{2k} = \nu_{2k-1} + 1 \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, \Big[\frac{m}{2}\Big]$$

и все коэффициенты тригонометрического полинома $U_{n,m}^*(x)$ неотрицательны.

Библиографический список

1. *Белов А. С.* Некоторые свойства и оценки для неотрицательных тригонометрических полиномов // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67. № 4. С. 3—20.
2. *Белов А. С.* Об экстремальных задачах на множестве неотрицательных тригонометрических полиномов // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 12-й Саратовской зимней школы, 27 янв.—3 февр. 2004 г. Саратов: ГосУНЦ "Колледж", 2004. С. 19—21.
3. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Ч. 2. 432 с.