Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2005 С. 83 – 91

Е. А. Иванова

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ КОНЕЧНЫМИ *P*-ГРУППАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ ГРУПП С ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Доказано, что свободное произведение с объединенными подгруппами двух конечных p-групп аппроксимируется конечными p-группами относительно сопряженности тогда и только тогда, когда оно аппроксимируется конечными p-группами. На основании этого результата получены некоторые достаточные условия аппроксимируемости конечными p-группами относительно сопряженности свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами.

It is proved that any free product with amalgamated subgroups of two finite p-groups is a conjugacy p-separable group if and only if it is a residually finite p-group. With the help of this result some sufficient conditions of conjugacy p-separability of a free product of two groups with amalgamated subgroups are established.

УДК 512.543.

1. Введение

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) относительно сопряженности, если для любых элементов a и b этой группы, не сопряженных в ней, найдется гомоморфизм группы G на конечную группу (соответственно на конечную p-группу) X, образы относительно которого элементов a и b не сопряжены в X.

Очевидно, что если некоторая группа является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, то она финитно аппроксимируема (т. е. аппроксимируема конечными группами относительно равенства). Столь же очевидно аналогичное утверждение для $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Несмотря на то что соответствующие обратные утверждения, вообще говоря, не имеют места, в ряде случаев оказывается, что условия, гарантирующие финитную аппроксимируемость групп некоторого класса, обеспечивают и финитную аппроксимируемость их относительно сопряженности. Так, в работе Дж. Дайер [7] доказано, что свободное произведение с объединенной подгруппой двух групп является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, если свободные множители являются конечными группами (финитная аппроксимируемость таких групп была установлена Г. Баумслагом [5] еще в 1963 году).

Свободное произведение с объединенной подгруппой двух конечных p-групп не обязательно является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой; условия, необходимые и достаточные для этого, указаны в работе Г. Хигмана [9]. Возникает естественный вопрос, будут ли эти условия обеспечивать и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость таких свободных произведений относительно сопряженности? В этом направлении в работе [1] были получены некоторые результаты.

Элемент g группы G назовем C_{fp}-отделимым, если для любого элемента a этой группы, не сопряженного с элементом g, найдется гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную p-группу X такой, что в группе X элемент $a\varphi$ не сопряжен с элементом $g\varphi$. Таким образом, группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы C_{fp}-отделим.

В [1], в частности, доказано, что

если свободное произведение с объединенными подгруппами двух конечных p-групп является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, то все его элементы бесконечного порядка являются C_{fp}-отделимыми.

На основании этого результата нам удалось получить следующий p-аналог теоремы Дж. Дайер:

Теорема 1. *Свободное произведение $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ двух конечных p-групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B является группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности, тогда и только тогда, когда оно является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

Применяя полученный результат и используя стандартную в этих случаях методику, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть группы H и K $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы относительно сопряженности, A и B — центральные подгруппы групп H и K соответственно, причем подгруппы A и B и все их подгруппы конечного p-индекса $\mathcal{F}_p$-отделимы в группах H и K соответственно. Тогда группа $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Напомним, что подмножество M группы G называется $\mathcal{F}_p$-отделимым, если для любого элемента $a \in G$, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу X такой, что $a\varphi \notin M\varphi$.

Описание $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп было дано в [2]. Из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Пусть $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ — свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных нильпотентных групп H и K, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности, причем A и B — p'-изолированные центральные подгруппы групп H и K соответственно. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Напомним, что если p — простое число, то подгруппа X некоторой группы Y называется p-изолированной, если для любого элемента $y \in Y$

из включения $y^p \in X$ следует, что $y \in X$. Подгруппа X группы Y называется p'-изолированной, если она q-изолирована для любого простого числа $q \neq p$.

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 является определенной модификацией доказательства Дайер [8]. В нем используется конструкция фундаментальной группы графа групп, и мы напомним соответствующие понятия.

Граф Γ есть система, состоящая из двух множеств, множества вершин $V = V(\Gamma)$ и множества ребер $E = E(\Gamma)$, и трех отображений: отображения $E \to E$, сопоставляющего ребру $e \in E$ некоторое ребро $\overline{e}$, называемое обратным к e, отображения $o : E \to V$, сопоставляющего ребру $e \in E$ некоторую вершину $o(e) \in V$, называемую началом ребра e, и отображения $t : E \to V$, сопоставляющего ребру $e \in E$ некоторую вершину $t(e) \in V$, называемую концом ребра e. При этом должны выполняться следующие равенства: $o(\overline{e}) = t(e)$, $t(\overline{e}) = o(e)$, $\overline{e} \neq e$ и $\overline{\overline{e}} = e$. Если для ребра $e \in E(\Gamma)$ $o(e) = u$ и $t(e) = v$, то будем писать также $e = (u, v)$.

Графом групп $(\mathcal{G}, \Gamma)$ называется связный граф Γ вместе с функцией $\mathcal{G}$, сопоставляющей каждой вершине $v \in V(\Gamma)$ некоторую группу G_v и каждому ребру $e \in E(\Gamma)$, $e = (u, v)$, некоторую группу G_e с двумя вложениями $\rho_e : G_e \to G_u$ и $\tau_e : G_e \to G_v$, причем $G_{\overline{e}} = G_e$, $\rho_{\overline{e}} = \tau_e$ и $\tau_{\overline{e}} = \rho_e$. Группы G_v и G_e называют соответственно вершинными и реберными группами графа групп $(\mathcal{G}, \Gamma)$.

Пусть $(\mathcal{G}, \Gamma)$ — граф групп. Фиксируем максимальное дерево T в графе Γ. Фиксируем также для каждой вершины $v \in V = V(\Gamma)$ множество порождающих X_v и множество определяющих слов R_v вершинной группы G_v (предполагая при этом, что при $v_1 \neq v_2$ $X_{v_1} \cap X_{v_2} = \emptyset$). Тогда группа, порождаемая элементами множества $\bigcup_{v \in V} X_v$ и символами t_e, где $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$, и определяемая в этой системе порождающих множеством слов $\bigcup_{v \in V} R_v$ и всевозможных соотношений вида

$$\begin{aligned} g &= g(\rho_e^{-1}\tau_e), &&\text{где } e \in E(T) \text{ и } g \in G_e\rho_e, \\ t_e^{-1} g t_e &= g(\rho_e^{-1}\tau_e), &&\text{где } e \in E(\Gamma) \setminus E(T) \text{ и } g \in G_e\rho_e, \\ t_{\overline{e}} &= t_e^{-1}, &&\text{где } e \in E(\Gamma) \setminus E(T), \end{aligned}$$

называется фундаментальной группой графа групп $(\mathcal{G}, \Gamma)$ и обозначается через $\pi(\mathcal{G}, \Gamma)$. Можно доказать, что эта группа не зависит от выбора заданий вершинных групп порождающими и определяющими соотношениями и от выбора максимального дерева T.

Известно (см., напр., [6, 10, 11]), что произвольная группа, являющаяся конечным расширением свободной группы, изоморфна фундаментальной группе некоторого графа групп, все вершинные группы которого конечны.

Нам потребуется также следующий результат [1]:

Предложение 2.1. *Пусть H — субнормальная подгруппа конечного p-индекса группы G. Если элемент $h \in H$ является $\mathcal{C}_{fp}$-отделимым в группе H, то он является $\mathcal{C}_{fp}$-отделимым и в группе G.*

Приступим теперь к доказательству теоремы 1.

Пусть $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ — свободное произведение конечных p-групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B. Необходимость условия теоремы очевидна.

Пусть G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Тогда, как нетрудно видеть (см., напр., [4, лемма 2.1]), группа G есть расширение некоторой свободной группы F при помощи конечной p-группы. Ввиду упомянутого выше результата работы [1] для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности группы G достаточно показать, что для любых двух элементов a и b группы G, имеющих конечный порядок и не сопряженных в G, существует гомоморфизм группы G на конечную p-группу, образы относительно которого элементов a и b не сопряжены.

Поскольку подгруппа, порождаемая в группе G подгруппой F и элементом a, субнормальна, в силу предложения 2.1 мы можем считать, что группа G порождается подгруппой F и элементом a. В частности, фактор-группа G/F является циклической, и потому в случае, когда элементы a и b лежат в разных смежных классах по подгруппе F, естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/F является искомым.

Пусть $aF = bF$. Так как группа F без кручения, элементы a и b имеют одинаковый порядок, и этот порядок равен числу p^n для некоторого $n \geqslant 1$. Как отмечено выше, группа G изоморфна фундаментальной группе некоторого графа групп, все вершинные группы которого изоморфны подгруппам циклической группы порядка p^n. Используя ряд преобразований графов групп, Дж. Дайер [8] доказала, что в этой ситуации существует гомоморфизм группы G на фундаментальную группу $H = \pi(\mathcal{H}, \Gamma)$ графа групп $(\mathcal{H}, \Gamma)$ такого, что

1) граф Γ содержит ровно две вершины u и v;

2) вершинные группы H_u и H_v являются циклическими порядка p^n и порождаются образами x и y элементов a и b соответственно;

3) все реберные группы H_e имеют порядок, меньший, чем p^n.

Таким образом, группа H порождается элементами x, y и множеством элементов вида t_e, где e — произвольное ребро графа Γ, отличное от некоторого фиксированного ребра, и в этой системе порождающих определяется следующими соотношениями:

а) $x^{p^n} = 1$, $y^{p^n} = 1$;

б) $x^r = y^s$, где x^r и y^s — элементы групп H_u и H_v, имеющие одинаковый порядок, меньший, чем p^n;

в) соотношениями вида $t_e^{-1} h_1 t_e = h_2$, где $h_1 \in H_u$ и $h_2 \in H_v$ — элементы одинакового порядка, меньшего, чем p^n.

Из условия 3) следует, что все элементы из групп H_u и H_v, участвующие в соотношениях б) и в), принадлежат подгруппам K_u и K_v этих групп порядка p^k для некоторого $k < n$. Поэтому при факторизации группы H по нормальному замыканию N подгрупп K_u и K_v соотношения б) и в) тривиализируются, и фактор-группа H/N является свободным произведением двух циклических групп H_u/K_u и H_v/K_v порядка p^{n-k}, порождаемых образами элементов x и y, и семейства бесконечных циклических групп с порождающими t_e. Очевидный гомоморфизм группы H/N на прямое произведение групп H_u/K_u и H_v/K_v завершает построение искомого гомоморфного образа группы G. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть H и K — некоторые группы, A — подгруппа группы H, B — подгруппа группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм.

Напомним прежде всего, что произвольный элемент x группы $G = (H * K;\ A = B,\ \varphi)$ может быть записан в виде $x = x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, где каждый из сомножителей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежит одной из подгрупп H или K и при $n > 1$ любые соседние сомножители x_i и x_{i+1} не лежат в одной и той же из этих подгрупп (и потому не входят в соответствующую объединяемую подгруппу A или B). Такая запись элемента x называется его несократимой записью, а число n сомножителей этой записи (одно и то же для всех несократимых записей данного элемента) называется длиной элемента x. Элемент x группы G называется циклически несократимым, если либо его длина n равна 1, либо $n > 1$ и сомножители x_1 и x_n его несократимой записи не принадлежат одной и той же подгруппе H или K. В этом случае для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ запись

$$u_i = x_i x_{i+1} \cdot \cdots \cdot x_n x_1 \cdot \cdots \cdot x_{i-1}$$

элемента u_i является несократимой; элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ называются циклическими перестановками элемента x (отметим, что при $n = 1$ единственной циклической перестановкой элемента x является он сам).

Общий критерий Солитэра сопряженности двух элементов свободного произведения групп с объединенной подгруппой (теорема 4.6 из [3]) в рассматриваемом в теореме 2 случае центральных объединяемых подгрупп принимает более простой вид.

Предложение 3.1. *Пусть $G = (H * K;\ A = B, \varphi)$ — свободное произведение двух групп с объединенными центральными подгруппами A и B. Произвольный элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Циклически несократимые элементы x и y сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда их длины равны и либо они принадлежат одному свободному множителю и сопряжены в нем, либо их длины больше 1 и один из них совпадает с некоторой циклической перестановкой другого.*

Напомним также следующее понятие (см. [5]). Подгруппы $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$ называются (A, B, φ)-совместимыми, если $(A \cap R)\varphi = B \cap S$. Если нормальные подгруппы R и S групп H и K соответственно (A, B, φ)-совместимы, то отображение $\varphi_{R,S} : AR/R \to BS/S$, определяемое по правилу $(aR)\varphi_{R,S} = (a\varphi)S$ $(a \in A)$, является изоморфизмом подгруппы AR/R фактор-группы H/R на подгруппу BS/S фактор-группы K/S. Поэтому можно построить свободное произведение

$$G_{R,S} = \big(H/R * K/S;\ AR/R = BS/S,\ \varphi_{R,S}\big)$$

групп H/R и K/S с подгруппами AR/R и BS/S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{R,S}$. Естественные отображения группы H на фактор-группу H/R и группы K на фактор-группу K/S продолжаемы до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы $G = (H * K;\ A = B,\ \varphi)$ на группу $G_{R,S}$.

Предложение 3.2. *Пусть группы H и K $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы относительно сопряженности, A и B — центральные подгруппы групп*

H и K соответственно, причем подгруппы A и B и все их подгруппы конечного p-индекса $\mathcal{F}_p$-отделимы в группах H и K соответственно. Для любых нормальных подгрупп M и N конечных p-индексов групп H и K соответственно существуют (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$, имеющие конечные p-индексы в группах H и K и такие, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$.

Доказательство. Пусть сначала подгруппа M содержит подгруппу U группы A конечного p-индекса в A. Так как индекс подгруппы U в группе A является p-числом, то подгруппа U $\mathcal{F}_p$-отделима в H, поэтому фактор-группа H/U $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Поскольку A/U — конечная подгруппа группы H/U, найдется нормальная подгруппа R/U группы H/U конечного p-индекса такая, что $R/U \cap A/U = 1$. Очевидно, что тогда R является нормальной подгруппой конечного p-индекса в H и $R \cap A = U$. Можно считать также, что $R \leqslant M$. Аналогичное рассуждение справедливо, разумеется, и для группы K.

Если теперь M и N — нормальные подгруппы конечных p-индексов групп H и K, то полагая $U = (M \cap A) \cap (N \cap B)\varphi^{-1}$ и $V = (M \cap A)\varphi \cap (N \cap B)$, выберем в группе H такую нормальную подгруппу R конечного p-индекса, что $R \leqslant M$ и $R \cap A = U$, а в группе K — такую нормальную подгруппу S конечного p-индекса, что $S \leqslant N$ и $S \cap B = V$. Так как $U\varphi = V$, подгруппы R и S являются искомыми.

Приступим к доказательству теоремы 2. Пусть H и K — произвольные группы, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемые относительно сопряженности, $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ — свободное произведение групп H и K с объединенными центральными подгруппами A и B.

Пользуясь стандартными методами доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных произведений двух групп с объединенными подгруппами, нетрудно получить

Предложение 3.3. *Пусть группы H и K $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, A и B — центральные подгруппы групп H и K соответственно, причем подгруппы A и B и все их подгруппы конечного p-индекса $\mathcal{F}_p$-отделимы в группах H и K соответственно. Тогда группа $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Заметим, что если индексы (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S в группах H и K конечны и являются p-числами, то в силу теоремы 1 группа $G_{R,S}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности (ее $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость доказана в [9]). Поэтому для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности группы G достаточно показать, что для любых несопряженных элементов x и y группы G можно найти такие (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы R и S конечных p-индексов в группах H и K, что образы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ этих элементов не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Итак, пусть f и g — элементы группы G, не сопряженные в этой группе. В соответствии с теоремой Солитэра (предложение 3.1), предполагая без потери общности элементы f и g циклически несократимыми, рассмотрим отдельно ряд случаев.

Случай 1. Длины элементов f и g различны.

Поскольку подгруппы A и B $\mathcal{F}_p$-отделимы в группах H и K соответственно, то найдутся такие нормальные подгруппы конечных p-индексов $M \leqslant H$ и $N \leqslant K$, что все слоги несократимых записей элементов f и g (или одного из них, если длина другого равна 1) не принадлежат подгруппам AM и BN соответственно. По предложению 3.2 тогда найдутся (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$, имеющие конечные p-индексы в группах H и K и такие, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$. Тогда образы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ элементов f и g являются циклически несократимыми элементами группы $G_{R,S}$, длины которых совпадают с длинами элементов f и g соответственно и потому различны. Следовательно, в силу теоремы Солитэра элементы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Случай 2. Длины элементов f и g равны 1, и элементы f и g не лежат в одном и том же свободном множителе.

Будем для определенности считать, что $f \in H \setminus A$ и $g \in K \setminus B$. Из $\mathcal{F}_p$-отделимости подгрупп A и B в группах H и K следует существование нормальной подгруппы M конечного p-индекса группы H и нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы K таких, что $f \notin AM$ и $g \notin BN$. По предложению 3.2 найдутся (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы R и S конечных p-индексов групп H и K такие, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$. Тогда элементы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ не принадлежат одному и тому же свободному множителю группы $G_{R,S}$, и потому в силу предложения 3.1 они не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Случай 3. Длины элементов f и g равны 1, и элементы f и g принадлежат одному из свободных множителей.

Снова для определенности будем считать, что f и g входят в подгруппу H. Так как элементы f и g не сопряжены в группе H и эта группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности, существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса группы H такая, что в фактор-группе H/M элементы fM и gM не сопряжены. По предложению 3.2 теперь можно найти (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы R и S конечных p-индексов групп H и K такие, что $R \leqslant M$. Тогда элементы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ принадлежат свободному множителю H/R группы $G_{R,S}$ и не сопряжены в этом множителе. Поэтому в силу предложения 3.1 они не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Случай 4. Длины элементов f и g равны и больше 1.

Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_r$ (где r — длина g) — все циклические перестановки элемента g. Выберем, как в случае 1, (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы конечных p-индексов $R_0 \leqslant H$ и $S_0 \leqslant K$ такие, что все слоги несократимых записей элементов f и g не принадлежат подгруппам AR_0 и BS_0 соответственно. Так как элемент f отличен от каждого из элементов $g_1, g_2, \ldots, g_r$, в силу $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G (предложение 3.3) существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G, по модулю которой элемент f отличен от каждого из элементов $g_1, g_2, \ldots, g_r$. Полагая теперь $R = R_0 \cap N$ и $S = S_0 \cap N$, видим, что в группе $G_{R,S}$ образы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ элементов f и g являются циклически несократимыми элементами длины r и элемент $f\rho_{R,S}$ отличен от каждого из элементов $g_1\rho_{R,S}, g_2\rho_{R,S}, \ldots, g_r\rho_{R,S}$. Так как произвольная циклическая перестановка элемента $g\rho_{R,S}$ совпадает с одним из элементов $g_1\rho_{R,S}$,

$g_2\rho_{R,S}, \ldots, g_r\rho_{R,S}$, то элементы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ в силу предложения 3.1 не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Теорема 2 доказана.

Поскольку в конечно порожденной нильпотентной группе p'-изолированная подгруппа является $\mathcal{F}_p$-отделимой, теорема 3 непосредственно вытекает из теоремы 2.

Библиографический список

1. *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами свободных произведений двух групп с объединенной подгруппой // Мат. заметки Т. 76. Вып. 4. 2004. С. 502—509.
2. *Иванова Е. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 125—130.
3. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 129—140.
5. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.
6. *Cohen D. E.* Groups with free subgroups of finite index // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 26—44.
7. *Dyer J. L.* Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extensions // J. Aust. Math. Soc. 1980. Vol. 29, № 1. P. 35—51.
8. *Dyer J. L.* Separating conjugates in free-by-finite groups // J. London Math. Soc. (2). 1979. Vol. 20. P. 215—221.
9. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301—305.
10. *Karrass A., Pietrowski A., Solitar D.* Finite and infinite cyclic extensions of free groups // J. Aust. Math. Soc. 1973. Vol. 16. P. 458—466.
11. *Scott G. P.* An embedding theorem for groups with a free subgroup of finite index // Bull. Lond. Math. Soc. 1974. Vol. 6. P. 304—306.