Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2005 С. 91 – 96

С. В. Колесников

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ГАНКЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ H^{∞}

Пусть Γ — окружность $|z| = 1$, $\varphi(z)$ — ограниченная измеримая функция на Γ. Найдено условие на функцию $\varphi(z)$, необходимое и достаточное для ограниченности в пространстве H^{∞} оператора Ганкеля, определяемого функцией φ.

Let Γ be the circle $|z| = 1$, $\varphi(z)$ — function, bounded and measurable on Γ. In this note we find conditions on $\varphi(z)$, necessary and sufficient for boundedness in the space H^{∞} of Hankel operator definited by φ.

УДК 517.5+517.98.

Пусть D — единичный круг $|z| < 1$, Γ — окружность $|z| = 1$, H^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространства Харди, $H^p(\Gamma)$ — пространство граничных функций для функций из H^p и $H^2_-(\Gamma)$ — ортогональное дополнение $H^2(\Gamma)$ в пространстве $L^2(\Gamma)$ измеримых функций, суммируемых с квадратом на Γ.

Пусть $\varphi(\zeta)$ — ограниченная функция на Γ. Оператором Ганкеля, определяемым функцией $\varphi(\zeta)$, называется оператор

$$h_\varphi = P_-(\varphi f), \;\; f \in H^2(\Gamma),$$

где P_- — оператор ортогональной проекции из $L^2(\Gamma)$ в $H^2_-(\Gamma)$. Оператором Теплица называется оператор

$$T_\varphi(f) = M_\varphi(f) - h_\varphi(f), \;\; f \in H^2(\Gamma),$$

где $M_\varphi(f) = \varphi(z)f(z)$.

Для ограниченных функций φ оператор h_φ ограничен в пространстве $H^2(\Gamma)$, но, вообще говоря, не ограничен как оператор, действующий из пространства $H^{\infty}(\Gamma)$ в пространство $H^{\infty}_-(\Gamma) = H^2_-(\Gamma) \cap L^{\infty}(\Gamma)$.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие ограниченности оператора Ганкеля в пространстве $H^{\infty}(\Gamma)$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 05-01-00962) и гранта государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1892.2003.1)

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(\zeta)$ *— ограниченная функция на окружности* Γ*. Для того чтобы оператор Ганкеля* h_φ *был ограничен в пространстве* $H^\infty(\Gamma)$*, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки* $\zeta_0 \in \Gamma$ *существовала такая функция* $f(z, \zeta_0) \in H^1(\Gamma)$*, что*

$$\int_\Gamma \left|\frac{\varphi(\zeta) - f(z,\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0}\right| |d\zeta| < C, \tag{1}$$

где C *постоянная, не зависящая от* ζ_0*.*

Доказательство. Заметим, что для любой функции $q(z) \in L^2(\Gamma)$ ее проекция в пространство $H^2_-(\Gamma)$ совпадает с граничной функцией интеграла типа Коши

$$F_-(z, q) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{q(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| > 1,$$

и, значит, $h_\varphi(f)$ совпадает с граничной функцией для интеграла типа Коши $F_-(z, f\varphi)$ произведения $f(\zeta)\varphi(\zeta)$.

Пусть функция φ удовлетворяет условию теоремы 1.

При $z = re^{it}$, $r > 1$, $\zeta_0 = e^{it}$, имеем

$$|F_-(z, \varphi f)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)(\varphi(\zeta) - f(\zeta, \zeta_0))}{\zeta - z} d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{||f||_\infty}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|\varphi(\zeta) - f(\zeta, \zeta_0)|}{|\zeta - z|}|d\zeta|.$$

Отсюда, т. к. при $\zeta \in \Gamma$ имеет место неравенство $|\zeta - \zeta_0| \leqslant |\zeta - z|$, то

$$|F_-(z, \varphi f)| \leqslant \frac{||f||_\infty}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|\varphi(\zeta) - f(\zeta,\zeta_0)|}{|\zeta - \zeta_0|}|d\zeta| \leqslant C||f||_\infty.$$

Отсюда следует, что $||h_\varphi(f)||_\infty \leq C||f||_\infty$, т. е. оператор h_φ ограничен в $H^\infty(\Gamma)$.

Предположим теперь, что h_φ ограничен в $H^\infty(\Gamma)$.

Оператор Ганкеля h_φ представим в виде

$$h_\varphi = M_\varphi - T_\varphi. \tag{2}$$

Отсюда следует, что оператор Теплица T_φ также ограничен и $||T_\varphi||_\infty \leqslant ||h_\varphi||_\infty + ||\varphi||_\infty$.

Для любой функции $f \in H^\infty$ функция $T_\varphi(f)$ является граничной для интеграла типа Коши $F_+(z, f\varphi)$ в круге D от функции $f(\zeta)\varphi(\zeta)$. Поэтому $|F_+(z, f\varphi)| \leqslant ||T_\varphi(f)||_\infty$ и при фиксированном $z \in D$ будет

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leqslant ||T_\varphi||_\infty ||f||_\infty.$$

Это означает, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\,, \quad f \in H^\infty(\Gamma)\,,$$

является линейным ограниченным функционалом на $H^\infty(\Gamma)$ с нормой не превосходящей $||T_\varphi||_\infty$. Из соотношения двойственности для экстремальных задач в пространствах H^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (см. [2, гл. 4, с. 188, теорема 1.2]), следует, что существует функция $g \in H^1$ такая, что

$$||\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} - g(\zeta)||_1 \leqslant ||T_\varphi||_\infty.$$

Возьмем последовательность $z_n \in D$, $z_n \to \zeta_0 \in \Gamma$ и выберем для каждой точки z_n такую функцию $g_n \in H^1$, для которой

$$||\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_n} - g_n(\zeta)|| \leqslant ||T_\varphi||_\infty.$$

Пусть $G_n(\zeta) = \varphi(\zeta)/(\zeta - z_n) - g_n(\zeta)$, $n = 1, 2, \dots$ Поскольку последовательность G_n ограничена в $L^1(\Gamma)$, то по теореме Комлоша (см. [1, с. 337, теорема 4.7.23]) существует подпоследовательность G_{n_k} такая, что последовательность средних арифметических

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} G_{n_k}(z), \quad m = 1, 2, \dots ,$$

сходится почти всюду на Γ к некоторой функции $G(z)$, очевидно, также принадлежащей $L^1(\Gamma)$.

Так как $\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta_0$, то последовательность

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_{n_k}}, \quad m = 1, 2, \dots ,$$

при всех $\zeta \in \Gamma$, $\zeta \neq \zeta_0$, сходится к $\varphi(\zeta)/(\zeta - \zeta_0)$. Поэтому последовательность средних для последовательности $g_n(\zeta)$

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g_{n_k}(z), \quad m = 1, 2, \dots ,$$

сходится почти всюду на Γ, причем по теореме Хинчина — Островского предельная функция почти всюду на Γ совпадает с граничными значениями некоторой функции $g(z) \in H^1$. Очевидно, при этом

$$||\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} - g(z)||_1 \leqslant C, \quad z \in \Gamma.$$

Таким образом, функция $f(z, \zeta_0) = (\zeta - \zeta_0)g(z)$, также принадлежащая $H^1(\Gamma)$, удовлетворяет условию теоремы 1.

Теорема доказана.

Будем обозначать через $A(\Gamma)$ и $A_-(\Gamma)$ подпространства всех непрерывных на Γ функций из пространств $H^\infty(\Gamma)$ и $f \in H^\infty_-(\Gamma)$ соответственно.

Теорема 2. *Если для любой функции $f(z) \in A(\Gamma)$ функция $h_\varphi(f)$ принадлежит пространству $H^\infty_-(\Gamma)$, то оператор h_φ ограничен в $H^\infty(\Gamma)$.*

Доказательство. По (2) для доказательства теоремы, очевидно, достаточно доказать ограниченность оператора Теплица T_φ.

Покажем сначала, что существует такое $C > 0$, что для любой функции $f \in A(\Gamma)$ будет:

$$||T_\varphi(f)||_\infty \leqslant C||f||_\infty.$$

Предположив противное, покажем, что можно построить последовательность функций $f_n \in A(\Gamma)$ и последовательность точек $z_n \in D$, $|z_{n-1}| < |z_n|$, так, чтобы выполнялись следующие условия

$$||f_n||_\infty < \frac{1}{2^n(1-|z_{n-1}|)}$$

и

$$|F_+(z_n, f_n\varphi)| > n + \sum_{k=1}^{n-1} ||T_\varphi(f_k)||\,,$$

$n = 1, 2, \dots$.

Построение будем проводить по индукции.

В качестве функции f_1 возьмем любую функцию $f_1 \in A(\Gamma)$, удовлетворяющую неравенству $|f_1(z_1)| > 1$ в некоторой точке $z_1 \in D$.

Если функции f_1, f_2, $\dots$, f_{n-1} и точки $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ уже построены, то в силу сделанного предположения, найдется функция $f_n \in A(\Gamma)$ с нормой $||f_n||_\infty \leqslant 1/(2^n(1-|z_{n-1}|))$, для которой

$$||T_\varphi(f)||_\infty > n + \sum_{k=1}^{n-1} ||T_\varphi(f_k)||.$$

Так как функция $T_\varphi(f)$ является граничной функцией для интеграла типа Коши $F_+(z, f\varphi)$, то в некоторой точке z_n, $1 > |z_n| > |z_{n-1}|$, будет выполняться неравенство $|F_+(z_n, f_n\varphi)| > n + \sum_{k=1}^{n-1} ||T_\varphi(f_k)||$.

Положим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

так что $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_\infty < \infty$ и функция f является непрерывной на Γ, т. е. $f \in A(\Gamma)$.

Очевидно,

$$F_+(z_n, f\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Gamma \frac{f_k(\zeta)\varphi(\zeta)}{z_n - \zeta} dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} F_+(z_n, f_k\varphi) + F_+(z_n, f_n\varphi) + \sum_{k=n+1}^{\infty} F_+(z_n, f_k\varphi).$$

Отсюда, т. к. $|F_+(z, f\varphi)| < ||T_\varphi(f_k)||_\infty$ и при $k > n$ имеет место неравенство

$$||T_\varphi(f_k)||_\infty < \frac{1}{2^k(1-|z_{k-1}|)},$$

получаем

$$|F_+(z_n, f\varphi)| > |F_+(z_n, f\varphi)| - \sum_{k=1}^{n-1} ||T_\varphi(f_k)||_\infty -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_\Gamma \left|\frac{f_k(\zeta)\varphi(\zeta)}{z_n-\zeta}\right| |dz| \geqslant n - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{||\varphi||_\infty ||f_k||_\infty}{1-|z_n|} \geqslant$$

$$\geqslant n - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{||\varphi||_\infty}{2^k} \geqslant n - ||\varphi||_\infty.$$

Таким образом, функция $F_+(z, f\varphi)$ неограничена в D и, следовательно, $T_\varphi(f) \notin H^\infty(\Gamma)$, что противоречит условию теоремы.

Возьмем теперь произвольную функцию $g \in H^\infty$ и положим $g_n(z) = g(r_n z)$, $r_n = 1 - 1/n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $g_n \in A(\Gamma)$ и $||g_n||_\infty \leqslant ||g||_\infty$. По доказанному $||T_\varphi(g_n)||_\infty \leqslant C||g_n||_\infty$. По теореме Фату функция $g(z)$ имеет почти в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ радиальный предел равный $g(\zeta)$, поэтому последовательность $g_n(\zeta)$ почти всюду на Γ сходится к $g(\zeta)$. Отсюда

$$F_+(z, g\varphi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_n(\zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant C||g_n||_\infty \leq ||g||_\infty, \quad |z| < 1.$$

Так как $T_\varphi(g)$ есть граничная функция интеграла типа Коши $F_+(z, g\varphi)$, то

$$||T_\varphi(g)||_\infty \leqslant C||g||_\infty.$$

Это означает, что оператор T_φ ограничен.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Богачев В. И.* Основы теории меры. М.; Ижевск: НИТЦ, 2003. Т. 1. (Регулярная и хаотическая динамика).
2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции, М.: Мир, 1984. 450 с.