Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2006 С. 102 – 106

Д. Н. Азаров

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ P-ГРУППАМИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП С КОНЕЧНЫМИ ОБЪЕДИНЯЕМЫМИ ПОДГРУППАМИ

Получено необходимое и достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с конечными объединяемыми подгруппами.

The necessary and sufficient condition for free product of two finitely generated nilpotent groups with finite amalgamated subgroups to be residually a finite p-group is obtained.

УДК 512.543.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Группа A называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если для любого ее неединичного элемента x существует гомоморфизм группы A на некоторую группу из $\mathcal{K}$, при котором образ этого элемента отличен от 1. Здесь будет рассматриваться свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп.

Напомним, что нормальным рядом группы A называется любая последовательность ее нормальных подгрупп вида

$$1 = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = A. \tag{1}$$

Если H — подгруппа группы A, то можно рассматривать нормальный ряд

$$1 = A_0 \cap H \leqslant A_1 \cap H \leqslant \cdots \leqslant A_n \cap H = H, \tag{2}$$

высекаемый в подгруппе H рядом (1). Если ряд (1) обозначен через $\mathcal{R}$, то через $\mathcal{R}(H)$ будем обозначать ряд, полученный из ряда (2) удалением повторяющихся членов.

Нормальный ряд без повторяющихся членов, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений, называется главным рядом. Очевидно, что нормальный ряд конечной p-группы является главным тогда и только тогда, когда все его факторы имеют порядок p.

Далее через G будем обозначать свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма $\varphi : H \to K$.

Если $\mathcal{R}$ — нормальный ряд группы H, то через $\mathcal{R}^{\varphi}$ будем обозначать нормальный ряд группы K, составленный из φ-образов членов ряда $\mathcal{R}$. Нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ групп A и B будем называть φ-совместимыми, если ряд $\mathcal{R}_A(H)^{\varphi}$ совпадает с рядом $\mathcal{R}_B(K)$.

В [3] доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть A и B — конечные p-группы. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах A и B существуют главные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$, являющиеся φ-совместимыми.*

Мы обобщаем этот результат таким образом.

Теорема 2. *Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, S и T — периодические части групп A и B. И пусть $H \leqslant S$, $K \leqslant T$. Предположим, что группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, т. е. их подгруппы S и T являются конечными p-группами. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$, удовлетворяющие следующим двум условиям:*

(а) ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ являются φ-совместимыми;

(б) члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ инвариантны в группах A и B соответственно.

Отметим, что аналогичный критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости *HNN*-расширения, базовая группа которого является нильпотентной с конечным числом порождающих, а связанные подгруппы конечны, получен Д. И. Молдаванским (см. его статью в этом же “Вестнике”).

Далее, как и в теореме 2, мы будем предполагать, что G — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с конечными объединенными подгруппами H и K и при этом периодические части S и T групп A и B являются p-группами.

Непосредственно проверяется, что подгруппа P группы G, порожденная подгруппами S и T, является их свободным произведением с объединенными подгруппами H и K. Очевидным необходимым условием $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G является требование $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы P, которое в силу теоремы 1 равносильно существованию в группах S и T главных рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$, удовлетворяющих условию *(а)*. С другой стороны, несложные примеры показывают, что существование в группах S и T главных рядов с условием *(а)* не гарантирует, что в этих группах существуют главные ряды, которые наряду с условием *(а)* удовлетворяют еще и условию *(б)*. Поэтому требование $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы P не достаточно для $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G.

Заметим еще, что нильпотентная аппроксимируемость группы G равносильна ее $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости [2]. Поэтому теорему 2 можно рассматривать как критерий нильпотентной аппроксимируемости группы G.

Приступим к доказательству теоремы 2.

Пусть группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Так как подгруппы S и T группы G конечны, то найдется нормальная подгруппа L группы G конечного p-индекса такая, что $L \cap S = 1$ и $L \cap T = 1$. Уплотняя ряд $1 \leqslant L \leqslant G$, получим нормальный ряд $\mathcal{R}_G$ группы G вида

$$1 \leqslant L = G_1 \leqslant G_2 \leqslant \cdots \leqslant G_k = G,$$

в котором для любого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ порядок фактора G_{i+1}/G_i равен p. Очевидно, что ряд $\mathcal{R}_G$ высекает в подгруппах S и T нормальные ряды с факторами порядка p или 1. Поэтому ряды

$$\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_G(S) \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_T = \mathcal{R}_G(T)$$

являются главными рядами в группах S и T. Очевидно, что члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ инвариантны в A и B соответственно. Очевидно также, что

$$\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_G(H), \quad \mathcal{R}_T(K) = \mathcal{R}_G(K).$$

В группе G подгруппы H и K совпадают, и, следовательно,

$$\mathcal{R}_G(H) = \mathcal{R}_G(K).$$

Поэтому если S и T рассматривать как подгруппы группы G, то из трех последних равенств следует, что

$$\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(K).$$

Отсюда и из того, что в группе G равенство элементов h из H и k из K возможно только, если $h\varphi = k$, получаем:

$$\mathcal{R}_S(H)^{\varphi} = \mathcal{R}_T(K),$$

т. е. ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ φ-совместимы. Таким образом, ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ удовлетворяют условиям *(а)* и *(б)*.

Наоборот, пусть в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$, удовлетворяющие условиям *(а)* и *(б)*. Так как факторы рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ имеют порядок p, то тем же свойством обладают и факторы рядов $\mathcal{R}_S(H)$ и $\mathcal{R}_T(K)$. Поэтому ряды $\mathcal{R}_S(H)$ и $\mathcal{R}_T(K)$ являются главными рядами групп H и K соответственно.

Ряд $\mathcal{R}_S$ представляет собой последовательность нормальных подгрупп группы A вида

$$1 = S_0 \leqslant S_1 \leqslant \cdots \leqslant S_l = S.$$

Очевидно, что для каждого $k = 0, 1, \ldots, l$ фактор-группа A/S_k $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и поэтому найдется нормальная подгруппа M_k конечного p-индекса группы A такая, что

$$M_k \cap S = S_k.$$

Отсюда и из того, что $H \subseteq S$, получаем:

$$M_k \cap H = S_k \cap H. \tag{3}$$

Для каждого $i = 0, 1, \ldots, l$ подгруппа

$$N_i = \bigcap_{k=i}^{l} M_k$$

является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы A и в силу (3)

$$N_i \cap H = \bigcap_{k=i}^{l} (M_k \cap H) = \bigcap_{k=i}^{l} (S_k \cap H).$$

Отсюда и из того, что $S_i \subseteq S_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq S_l$, получаем

$$N_i \cap H = S_i \cap H. \tag{4}$$

В частности,

$$N_0 \cap H = S_0 \cap H = 1 \cap H = 1. \tag{5}$$

Нормальный ряд группы A

$$1 \leqslant N_0 \leqslant N_1 \leqslant \cdots \leqslant N_l \leqslant A$$

обозначим через $\mathcal{R}'_A$. Из (4) следует, что

$$\mathcal{R}'_A(H) = \mathcal{R}_S(H). \tag{6}$$

Поскольку члены N_i ряда $\mathcal{R}'_A$ имеют в группе A конечный p-индекс, то, уплотняя ряд $\mathcal{R}'_A$, мы получим нормальный ряд $\mathcal{R}_A$ вида

$$1 \leqslant N_0 = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_m = A,$$

в котором для каждого $i = 0, 1, \ldots, m-1$

$$|A_{i+1}/A_i| = p. \tag{7}$$

В силу (5)

$$A_0 \cap H = 1. \tag{8}$$

Так как $\mathcal{R}_A$ — уплотнение ряда $\mathcal{R}'_A$, то $\mathcal{R}_A(H)$ — уплотнение ряда $\mathcal{R}'_A(H)$, совпадающего в силу (6) с $\mathcal{R}_S(H)$. Таким образом, $\mathcal{R}_A(H)$ — уплотнение главного ряда $\mathcal{R}_S(H)$, и поэтому

$$\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_S(H). \tag{9}$$

Аналогичным образом в группе B можно построить нормальный ряд $\mathcal{R}_B$ вида

$$1 \leqslant B_0 \leqslant B_1 \leqslant \cdots \leqslant B_n = B,$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$\mathcal{R}_B(K) = \mathcal{R}_T(K), \tag{10}$$

$$B_0 \cap K = 1, \tag{11}$$

$$|B_{i+1}/B_i| = p \tag{12}$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

По условию *(a)* ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ являются φ-совместимыми. Поэтому из равенств (9) и (10) следует φ-совместимость рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$.

Таким образом, в группах A и B существуют нормальные φ-совместимые ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$, удовлетворяющие условиям (7), (8), (11), (12). Отсюда вытекает $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G в силу следующего результата, доказанного в [1] (теорема 2.3).

Теорема 3. *Пусть F — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп C и D с конечными подгруппами U и V, объединенными относительно изоморфизма $\psi : U \to V$. Группа F является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах C и D существуют нормальные ψ-совместимые ряды*

$$1 \leqslant C_0 \leqslant C_1 \leqslant \cdots \leqslant C_m = C$$

и

$$1 \leqslant D_0 \leqslant D_1 \leqslant \cdots \leqslant D_n = D,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$C_0 \cap U = 1, \qquad D_0 \cap V = 1,$$

$$|C_{i+1}/C_i| = p, \qquad |D_{j+1}/D_j| = p$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$ и для всех $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. № 1. С. 3—13.
2. *Иванова Е. А.* Аппроксимируемость нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенными конечными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Иваново, 2004. Вып. 3. С. 120—125.
3. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301—305.