Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2006 С. 107 – 121

А. С. Белов

О СУММЕ МОДУЛЕЙ ЧЛЕНОВ СГРУППИРОВАННОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Изучаются абсолютная сходимость сгруппированного некоторым образом тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами и свойства суммы модулей членов такого ряда.

Absolute convergence of grouped some way trigonometrical series with monotone coefficients and properties of the sum of modules of members of such series are investigated.

УДК 517.5.

Введение

Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty\,. \tag{1}$$

Тогда (см. [1, гл. 13, § 11]) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \, \cos(nx)\, | \tag{2}$$

расходится для всех x, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \, \sin(nx)\, | \tag{3}$$

расходится для всех x, для которых число x/π не целое.

Пусть $\Lambda = \{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, причем $N_0 = 1$. Эту последовательность будем далее считать фиксированной. Цель этой статьи — изучить сходимость полученных из тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами сгруппированных рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Bigl| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j - 1} a_n \, \cos(nx) \Bigr| , \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05–01–00052).

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n\,\sin(nx)\Big|, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\max_{N_{j-1}\leqslant k\leqslant m<N_j}\Big|\sum_{n=k}^{m} a_n\,\cos(nx)\Big|, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\max_{N_{j-1}\leqslant k\leqslant m<N_j}\Big|\sum_{n=k}^{m} a_n\,\sin(nx)\Big| \tag{7}$$

и некоторые свойства их сумм. Ряды (4) — (7) являются естественным обобщением рядов вида (2) или (3). Подчеркнем, что далее последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ всегда предполагается невозрастающей.

В § 1 будет доказана

Теорема 1. *a) Если*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{N_j} = +\infty\,, \tag{8}$$

то каждый из рядов (4) — (7) расходится п. в. и множество всех его точек сходимости первой категории. Более того, ряд (6) расходится всюду, а ряд (7) расходится во всех точках x, не кратных π.

b) Если

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{N_j} < +\infty\,, \tag{9}$$

то ряды (4) и (6) сходятся во всех точках x, не кратных 2π, а ряды (5) и (7) сходятся во всех точках x, причем на любом отрезке, не содержащем кратных 2π точек x, сходимость рядов (4) — (7) равномерна.

При условии (9) суммы рядов (4) — (7) будем обозначать соответственно через $f(x)$, $g(x)$, $f^*(x)$, $g^*(x)$. В случае выполнения условия (1) функции f и f^* в точках x, кратных 2π, считаются равными $+\infty$. Ясно, что функции f, g, f^*, g^* являются четными и имеют период 2π. В § 1 будут приведены примеры, которые показывают, что при условии (8) ряды (4) и (5) могут быть сходящимися на бесконечном множестве точек в интервале $(0,\pi)$ и даже на множестве точек мощности континуума.

Очевидно, что при условии (9) каждая из функций f и f^* ограничена на интервале $(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда условие (1) не выполнено. В § 2 будет доказано, что справедлива

Теорема 2. *Если выполнено условие (9), то каждая из функций g и g^* ограничена на прямой тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{n\geqslant 1}(na_n) < +\infty \tag{10}$$

и величина

$$A = \sup_{N\geqslant 1}\sum_{j\geqslant 1:N_{j-1}\geqslant N}\ \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N)} a_n < +\infty\,, \tag{11}$$

где для краткости при всех $j \geqslant 1$ обозначено

$$V_j(N) = N_{j-1} + \min\left(N_j - N_{j-1} \,,\, N \right) - 1 \,, \tag{12}$$

а N пробегает все натуральные числа. Более того, верны оценки

$$\frac{1}{7} \sup_x g^*(x) \leqslant A + \sup_{n \geqslant 1} (n a_n) \leqslant 14 \sup_x g(x) \,. \tag{13}$$

Также будут получены некоторые оценки и сверху и снизу функций (4) — (7) через коэффициенты.

В § 3 будут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 3. *a) Если выполнено условие*

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j - 1} \frac{a_n}{n - N_{j-1} + 1} < +\infty \,, \tag{14}$$

то каждая из функций f, g, f^*, g^* интегрируема на интервале $(0,\pi)$ и верны оценки

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\, dx \leqslant 14B \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^*(x)\, dx \leqslant 14B \,. \tag{15}$$

b) Если некоторая из функций g, g^*, f^* интегрируема на интервале $(0,\pi)$, то выполнено условие (14) и справедливы оценки

$$B \leqslant \frac{10}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx \quad \text{и} \quad B \leqslant \frac{18}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\, dx \,. \tag{16}$$

c) Если функция f интегрируема на интервале $(0,\pi)$ и

$$\lambda = \sup_{j \geqslant 1} \frac{\ln(N_j + 1)}{\ln(N_{j-1} + 1)} < +\infty \,, \tag{17}$$

то выполнено условие (14) и верна оценка

$$B \leqslant 6(\lambda + 1) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \,. \tag{18}$$

Для краткости при всех натуральных N будем далее использовать обозначение

$$A(N) = \sum_{j \geqslant 1 : N_{j-1} \geqslant N} \; \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N)} a_n \,. \tag{19}$$

Теорема 4. *Пусть $p \in (1,\infty)$. a) Если выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\, a_n^p < +\infty \tag{20}$$

и

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)}\,(A(N))^p < +\infty\,, \tag{21}$$

то функции $f, g, f^*, g^* \in L^p_{2\pi}$ и справедливы оценки

$$\Big(\max\Big\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^*(x))^p\,dx\,,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g^*(x))^p\,dx\Big\}\Big)^{1/p} \leqslant$$
$$16p\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\,a_n^p\Big)^{1/p} + 6\Big(\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N(N+1)}\,(A(N))^p\Big)^{1/p}. \tag{22}$$

b) Если некоторая из функций f, g, f^*, g^* принадлежит пространству $L^p_{2\pi}$, то выполнены условия (20) *и* (21) *и справедливы оценки*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\,a_n^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N(N+1)}\,(A(N))^p\Big)^{1/p} \leqslant$$
$$\frac{200p}{(p-1)}\Big(\min\Big\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^p\,dx\,,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g(x))^p\,dx\Big\}\Big)^{1/p}. \tag{23}$$

Теперь перейдем к доказательствам сформулированных выше результатов.

§ 1. Исследование сходимости рядов (4) — (7)

Через $t(x)$ будем обозначать любую из функций $\cos(x)$ или $\sin(x)$. В этом случае другая из этих функций будет обозначаться через $t_1(x)$. Ясно, что в точках x, кратных 2π, ряды (5) и (7) всегда сходятся к нулю, а ряды (4) и (6) сходятся тогда и только тогда, когда не выполнено условие (1). Если же точка x не кратна 2π, то исследование сходимости рядов (4), (6) и рядов (5), (7) аналогично. Поэтому мы будем рассматривать ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n\,t(nx)\Big| \tag{1.1}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty}\ \max_{N_{j-1}\leqslant k\leqslant m<N_j}\Big|\sum_{n=k}^{m} a_n\,t(nx)\Big|. \tag{1.2}$$

Подставляя $t = \cos$ или $t = \sin$ в полученные ниже результаты, будем получать соответствующие результаты для рядов (4), (6) или (5), (7).

Доказательство пункта a) теоремы 1. Пусть выполнено условие (8) и ряд (1.1) сходится на множестве положительной меры. Тогда для некоторого натурального числа q множество

$$E = E_q = \Big\{\, x \in (0,\pi) : \sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n\,t(nx)\Big| \leqslant q \,\Big\}$$

имеет положительную меру. Для каждого натурального j и $x \in E$ получаем

$$\Big|\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1}(a_{N_{j-1}}-a_n)\,t(nx)\Big| = \Big|\sum_{n=N_{j-1}+1}^{N_j-1}(a_{n-1}-a_n)\sum_{\nu=n}^{N_j-1}t(\nu x)\Big| \leqslant$$

$$\frac{1}{|\sin(x/2)|}\sum_{n=N_{j-1}+1}^{N_j-1}|a_{n-1}-a_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}\,|a_{N_{j-1}}-a_{N_j}|.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big|a_{N_{j-1}}\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1}t(nx)\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1}a_n\,t(nx)\Big| +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1}(a_{N_{j-1}}-a_n)\,t(nx)\Big| \leqslant q+\frac{a_1}{|\sin(x/2)|} \leqslant \frac{q+a_1}{|\sin(x/2)|}.$$

Заметим, что

$$\Big|2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1}t(nx)\Big| = \Big|t_1\Big(\Big(N_j-\frac12\Big)x\Big)-t_1\Big(\Big(N_{j-1}-\frac12\Big)x\Big)\Big|.$$

Следовательно, при всех $x \in E$ имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{N_{j-1}}\Big|t_1\Big(\Big(N_j-\frac12\Big)x\Big)-t_1\Big(\Big(N_{j-1}-\frac12\Big)x\Big)\Big| \leqslant 2q+2a_1$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{N_{j-1}}\int_E\Big|t_1\Big(\Big(N_j-\frac12\Big)x\Big)-t_1\Big(\Big(N_{j-1}-\frac12\Big)x\Big)\Big|\,dx \leqslant 2\pi(q+a_1)\,.$$

Но по следствию 4 из работы [2], где надо взять $\tau=4$, $\delta=1$, $J=[0,\pi]$, существует такая положительная постоянная c, которая зависит только от множества E, что верна оценка

$$\int_E\Big|t_1\Big(\Big(N_j-\frac12\Big)x\Big)-t_1\Big(\Big(N_{j-1}-\frac12\Big)x\Big)\Big|\,dx \geqslant c \quad \text{при всех } j \geqslant 1.$$

Поэтому получено противоречие с условием (8). Следовательно, ряд (1.1) и тем более ряд (1.2) расходятся п. в. Поскольку для любого натурального q множество точек F_q , где сумма ряда (1.1) (ряда (1.2)) не превосходит q, является замкнутым и меры нуль, то множество точек сходимости ряда (1.1) (ряда (1.2)), которое равно $\cup_{q=1}^{\infty}F_q$, имеет первую категорию. Поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\,a_{N_j-1}\,|\,t((N_j-1)x)\,|+a_{N_j}\,|\,t(N_jx)\,|\,) \geqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{N_j}\,(\,t^2((N_j-1)x)+t^2(N_jx)\,) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{N_j}\,(1\pm\cos(x)\cos((2N_j-1)x)) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty}a_{N_j}\,(\,1-|\cos(x)|\,)\,,$$

то из условия (8) вытекает расходимость ряда (1.2) во всех не кратных π точках x. Пункт a) теоремы 1 доказан.

Пусть последовательность нечетных натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ строго возрастает и m_{k+1} делится на m_k при любом натуральном k, причем $m_0 = 1$. Положим $N_k = (m_k + 1)/2$ при всех $k \geqslant 0$, и пусть $a_n = a_{N_{j-1}}$ при всех $n = N_{j-1}, \ldots, N_j - 1$ и $j = 1, 2, \ldots$. Тогда ряд (1.1) превращается в ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \Big| \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} t(nx) \Big| = \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} \Big| 2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) \Big|^{-1} \Big| t_1\Big(m_j \frac{x}{2}\Big) - t_1\Big(m_{j-1}\frac{x}{2}\Big) \Big| .$$

Если, например, $m_k = 3^k$, при $k \geqslant 0$, то ряд (1.1) сходится во всех точках вида $x = 2\pi\nu 3^{-m}$, не кратных 2π. Если же $m_k = \prod_{j=1}^{k+1} (2j-1)^2$, при $k \geqslant 0$, то $\sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}}\, m_{j-1}/m_j < \infty$, и ряд (1.1) сходится во всех не кратных 2π точках вида $x = 4\pi \sum_{j=1}^{\infty} s_j/m_j$, где $s_j = 0, 1$, т. е. ряд (1.1) сходится на множестве точек мощности континуума.

Доказательство пункта b) теоремы 1. Пусть выполнено условие (9). Возьмем любое число $\delta \in (0, \pi)$, и пусть отрезок $I = [\delta, 2\pi - \delta]$. Тогда при $x \in I$ для любого натурального j и $N_{j-1} \leqslant k \leqslant m < N_j$ в силу преобразования Абеля имеем $\big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \big| \leqslant |\sin(x/2)|^{-1} a_k \leqslant a_{N_{j-1}} (\sin(\delta/2))^{-1}$. Следовательно, члены ряда (1.2), а значит и ряда (1.1), на отрезке $x \in I$ мажорируются членами сходящегося ряда $\sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}} (\sin(\delta/2))^{-1}$. Поэтому ряды (1.1) и (1.2) сходятся равномерно на I. Теорема 1 полностью доказана.

§ 2. Исследование сумм рядов (5) и (7) на ограниченность

Будем использовать обозначения, введенные в предыдущем параграфе, а также обозначения (11), (12) и (19). Пусть далее квадратные скобки от числа означают переход к его целой части. Справедлива

Лемма 2.1. *Для любых натуральных чисел j, q и N таких, что $N_{j-1} \leqslant N < N_j$, и любого $x \in \big[\frac{\pi}{q+1}, \frac{\pi}{q}\big]$ верны оценки*

$$\max_{N \leqslant k \leqslant m < N_j} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big| \leqslant \min\Big\{ 2\sqrt{2} \sum_{n=N}^{N+q-1} a_n, \sum_{n=N}^{N_j-1} a_n \Big\}, \tag{2.1}$$

$$\max_{N \leqslant k \leqslant m < N_j} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big| \leqslant 3 \sum_{n=N}^{\min(N+q, N_j)-1} a_n \tag{2.2}$$

и

$$\max_{N_{j-1} \leqslant k \leqslant m < N_j} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big| \leqslant 3 \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(q)} a_n . \tag{2.3}$$

Доказательство. При условиях леммы 2.1 и $N \leqslant k \leqslant m < N_j$ в силу преобразования Абеля имеем

$$\Big| \sum_{n=N}^{m} a_n\, t(nx) \Big| \leqslant \sum_{n=N}^{N+q-1} \Big| \sum_{s\geqslant 0: n+qs\leqslant m} a_{n+qs}\, t(nx+qsx) \Big| \leqslant$$

$$\sum_{n=N}^{N+q-1} \Big| \sin\Big(\frac{qx}{2}\Big) \Big|^{-1} a_n \leqslant \sqrt{2} \sum_{n=N}^{N+q-1} a_n\,,$$

поскольку $2qx \geqslant (q+1)x \geqslant \pi$ и $\sin(\,qx/2\,) \geqslant 2^{-1/2}$. Полученная выше оценка верна и при замене m на $k-1$. Поэтому

$$\Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big| \leqslant \Big| \sum_{n=N}^{m} a_n\, t(nx) \Big| + \Big| \sum_{n=N}^{k-1} a_n\, t(nx) \Big| \leqslant 2\sqrt{2} \sum_{n=N}^{N+q-1} a_n\,.$$

Поскольку $\big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \big| \leqslant \sum_{n=k}^{m} a_n \leqslant \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n$, то оценка (2.1) доказана. Из нее сразу вытекает оценка (2.2), которая при $n = N_{j-1}$ превращается в оценку (2.3). Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Для любого натурального числа N и $x \in \big[\,\frac{\pi}{N+1}\,, \frac{\pi}{N}\,\big]$ верны оценки*

$$g(x) \leqslant g^*(x) \leqslant 3 \sum_{n=1}^{N} na_n\, x + 3A(N) \tag{2.4}$$

и

$$g(x) \leqslant g^*(x) \leqslant (\pi+3) \max_{n=1,\,\ldots,\,N} (na_n) + 3A(N)\,. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть натуральное ν таково, что $N_{\nu-1} \leqslant N < N_\nu$. Тогда, используя оценки (2.2) и (2.3) при $q = N$, имеем

$$g^*(x) \leqslant \sum_{j=1}^{\nu-1} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} |a_n\, \sin(nx)| + \sum_{n=N_{\nu-1}}^{N-1} |a_n\, \sin(nx)| +$$

$$+ \max_{N\leqslant k\leqslant m<N_\nu} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, \sin(nx) \Big| + \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \max_{N_{j-1}\leqslant k\leqslant m<N_j} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, \sin(nx) \Big| \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} |a_n\, \sin(nx)| + 3 \sum_{n=N}^{\min(2N,N_\nu)-1} a_n + \sum_{j=\nu+1}^{\infty} 3 \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N)} a_n \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} |a_n\, \sin(nx)| + 3\,N\,a_N + 3A(N)\,.$$

Отсюда $g^*(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} na_n\, x + 2x \sum_{n=1}^{N} n\, a_N + 3A(N)$, что сразу приводит к оценке (2.4), и $g^*(x) \leqslant \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^{N} na_n + 3\,Na_N + 3A(N)$, что означает справедливость оценки (2.5). Лемма 2.2 полностью доказана.

Лемма 2.3. *Если сумма $h(x)$ ряда (1.1) интегрируема на $(0,\pi)$, то для любого натурального числа N и $x \in \left[\,\frac{\pi}{N+1}\,,\,\frac{\pi}{N}\,\right]$ верны оценки*

$$A(N) \leqslant \frac{8}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(v)h(v)\,dv \tag{2.6}$$

и

$$A(N) \leqslant \frac{16}{x}\int_0^x h(v)\,dv + 8x\int_x^{\pi}\frac{h(v)}{v^2}\,dv\,, \tag{2.7}$$

где $F_N(v) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{k}{N+1}\right)\cos(kv)$ — ядро Фейера.

Доказательство. Из (1.1) для каждого натурального числа J имеем

$$\Bigl|\sum_{j\geqslant 1:N_{j-1}\geqslant N, j\leqslant J} t(N_{j-1}v)F_N(v)\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n t(nv)\Bigr| \leqslant \sum_{j=1}^{J} F_N(v)\Bigl|\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n t(nv)\Bigr| \leqslant F_N(v)h(v).$$

Поэтому, интегрируя это неравенство по v от $-\pi$ до π, приходим к оценке

$$\sum_{j\geqslant 1:N_{j-1}\geqslant N, j\leqslant J}\ \sum_{n=0}^{\min\{N, N_j-N_{j-1}-1\}} \frac{1}{2}\Bigl(1 - \frac{n}{N+1}\Bigr)a_{N_{j-1}+n} = \Bigl|\sum_{j\geqslant 1:N_{j-1}\geqslant N, j\leqslant J}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(N_{j-1}v)F_N(v)\Bigl(\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n t(nv)\Bigr)dv\Bigr| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(v)h(v)\,dv\,.$$

В силу произвольности J отсюда получаем оценку

$$\sum_{j\geqslant 1:N_{j-1}\geqslant N}\ \sum_{n=0}^{\min\{[(N+1)/2], N_j-N_{j-1}-1\}} \frac{1}{4}a_{N_{j-1}+n} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(v)h(v)\,dv,$$

из которой, используя монотонность последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, выводим оценку

$$\sum_{j\geqslant 1:N_{j-1}\geqslant N}\ \sum_{n=0}^{\min\{N+1, N_j-N_{j-1}-1\}} a_{N_{j-1}+n} \leqslant \frac{8}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(v)h(v)\,dv.$$

Отсюда и из (19) оценка (2.6) следует немедленно. Поскольку

$$\int_0^{\pi} F_N(v)h(v)\,dv \leqslant \frac{(N+1)}{2}\int_0^x h(v)\,dv + \int_x^{\pi}\frac{\pi^2 h(v)}{2(N+1)v^2}\,dv \leqslant \frac{\pi}{x}\int_0^x h(v)\,dv + \frac{\pi}{2}\,x\int_x^{\pi}\frac{h(v)}{v^2}\,dv, \tag{2.8}$$

то оценка (2.7) также получена. Лемма 2.3 доказана полностью.

Лемма 2.4. *a) Если функция g интегрируема на $(0,\pi)$, то для любого натурального числа N верны оценки*

$$a_N \frac{N(N+2)}{6(N+1)} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \Big(1-\frac{n}{N+1}\Big) \frac{na_n}{(N+1)} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N\Big(v-\frac{\pi}{2(N+1)}\Big)\, g(v)\, dv. \qquad (2.9)$$

b) Если функция f интегрируема на $(0,\pi)$, то для любого натурального числа N верны оценки

$$a_N \frac{N}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \Big(1-\frac{n}{N+1}\Big) a_n \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(v) f(v)\, dv\,. \qquad (2.10)$$

Доказательство. Пусть сумма $h(x)$ ряда (1.1) интегрируема на $(0,\pi)$ и $N_j > N$. Тогда средние Фейера

$$\sigma_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \Big(1-\frac{n}{N+1}\Big) a_n\, t(nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{n=1}^{N_j-1} a_n\, t(nv)\Big) F_N(v-x)\, dv \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(v)\, F_N(v-x)\, dv\,.$$

Отсюда при $h=g$ и $x=\pi/(2(N+1))$ получаем оценку (2.9), а при $h=f$ и $x=0$ имеем оценку (2.10). Лемма 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнены условия (10) и (11). Поскольку $A \geqslant A(1) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j-1}}$, то условие (11) означает и выполнение условия (9). В силу (11) и (19) $A = \sup_{N\geqslant 1} A(N)$. Поэтому из (2.5) получаем оценку $g(x) \leqslant g^*(x) \leqslant (\pi+3)\sup_{n\geqslant 1}(na_n) + 3A$, из которой сразу вытекает ограниченность функций g и g^* на прямой и первая оценка (13). Достаточность в теореме 2 доказана. Докажем необходимость. Ограниченность функции g^* означает и ограниченность функции g. Поэтому предположим, что есть постоянная $K \in [0,+\infty)$ такая, что $g(x) \leqslant K$ при всех x. Тогда из (2.9) имеем

$$Na_N \leqslant \frac{6}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K\, F_N\Big(v-\frac{\pi}{2(N+1)}\Big)\, dv = 6K\,.$$

Следовательно, $\sup_{n\geqslant 1}(na_n) \leqslant 6K$. Из оценки (2.6) выводим

$$A(N) \leqslant \frac{8}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} KF_N(v)\, dv \leqslant 8K\,.$$

Значит, $A \leqslant 8K$. Тем самым получены условия (10) и (11) и вторая оценка (13). Теорема 2 полностью доказана.

§ 3. Исследование сумм рядов (4) — (7) на интегрируемость

Будем использовать введенные в § 1 обозначения, причем сумму ряда (1.2) будем обозначать $h^*(x)$.

Лемма 3.1. *Для любого натурального числа N и $x \in \left[\frac{\pi}{N+1}, \frac{\pi}{N}\right]$ верна оценка*

$$h^*(x) \leqslant 3A(N) + 4 \sum_{n=1}^{N} a_n . \tag{3.1}$$

Более того, если $p \in [1, \infty)$, то

$$\Big(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (h^*(x))^p \, dx \Big)^{1/p} \leqslant$$

$$6\Big(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \, (A(N))^p \Big)^{1/p} + 8\Big(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \Big(\sum_{n=1}^{N} a_n \Big)^p \Big)^{1/p} . \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть натуральное ν таково, что $N_{\nu-1} \leqslant N < N_\nu$. Тогда, используя оценки (2.2) и (2.3) при $q = N$, получаем

$$h^*(x) \leqslant \sum_{j=1}^{\nu-1} \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n + \sum_{n=N_{\nu-1}}^{N-1} a_n + \max_{N \leqslant k \leqslant m < N_\nu} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n \, t(nx) \Big| +$$

$$+ \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \max_{N_{j-1} \leq k \leq m < N_j} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n \, t(nx) \Big| \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} a_n + 3 \sum_{n=N}^{\min(2N, N_\nu)-1} a_n +$$

$$+ \sum_{j=\nu+1}^{\infty} 3 \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N)} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} a_n + 3 \, N a_N + 3A(N) .$$

Отсюда сразу вытекает оценка (3.1).

Из оценки (3.1) имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (h^*(x))^p \, dx = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_{\pi/(N+1)}^{\pi/N} (h^*(x))^p \, dx \leqslant$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{2}{N(N+1)} \Big(3A(N) + 4 \sum_{n=1}^{N} a_n \Big)^p \leqslant$$

$$2^p \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \, (\, 3A(N) \,)^p + 2^p \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \Big(4 \sum_{n=1}^{N} a_n \Big)^p .$$

Отсюда сразу получаем оценку (3.2). Лемма 3.1 полностью доказана.

Заметим, что оценка (3.1) верна и для функции f^*, и для функции g^*, но для последней справедлива и оценка (2.4).

Доказательство пункта а) теоремы 3. Из (12) и (19) имеем

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \, A(N) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{N_{j-1}} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N)} \frac{a_n}{N(N+1)} =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} a_n \sum_{N=n+1-N_{j-1}}^{N_{j-1}} \Big(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \Big) \leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n+1-N_{j-1}} = B_1 \leqslant B .$$

Поскольку

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \Big(\sum_{n=1}^{N} a_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant B\,,$$

то из оценки (3.2) при $p = 1$ получаем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h^*(x)\,dx \leqslant \\ 6 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} A(N) + 8 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \Big(\sum_{n=1}^{N} a_n \Big) \leqslant 14B\,.$$

Поэтому функции f^* и g^* интегрируемы на интервале $(0, \pi)$ и верны оценки (15). Пункт а) теоремы 3 доказан.

Пусть далее при $x > 0$ функция $N(x) = [\pi/x]$, т. е. целой части от π/x. Для суммы $h(x)$ ряда (1.1) через

$$M_h(x) = \sup_{0<|u|\leqslant\pi} \frac{1}{u} \int_x^{x+u} h(v)\,dv$$

обозначим ее максимальную функцию Харди — Литтлвуда.

Лемма 3.2. *Если сумма $h(x)$ ряда* (1.1) *интегрируема на* $(0, \pi)$, *то для любого натурального числа N и $x \in \big[\,\frac{\pi}{N+1}\,, \frac{\pi}{N}\,\big]$ верны оценки*

$$A(N) \leqslant 24 M_h(x) \tag{3.3}$$

и

$$N a_N \leqslant 36 M_h(x)\,. \tag{3.4}$$

Доказательство. Поскольку $\frac{1}{x} \int_0^x h(v)\,dv \leqslant M_h(x)$ и

$$x \int_x^{\pi} \frac{h(v)}{v^2}\,dv = \frac{x}{\pi^2} \int_x^{\pi} h(v)\,dv + x \int_x^{\pi} \frac{2}{v^3} \Big(\int_x^{v} h(u)\,du \Big)\,dv \leqslant \\ \Big(\frac{x(\pi - x)}{\pi^2} + x \int_x^{\pi} \frac{2(v-x)}{v^3}\,dv \Big) M_h(x) = \frac{(\pi - x)}{\pi} M_h(x)\,,$$

то из (2.7) имеем (3.3), а при $h = f$ из (2.8) и (2.10) получаем

$$N a_N \leqslant 6 M_f(x)\,. \tag{3.5}$$

Аналогично при $h = g$ оцениваем

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N\Big(v - \frac{\pi}{2(N+1)}\Big)\,g(v)\,dv \leqslant \\ \frac{(N+1)}{2} \int_{-x}^{x} g(v)\,dv + \int_x^{\pi} \frac{\pi^2 g(v)}{(N+1)} \Big(v - \frac{\pi}{2(N+1)}\Big)^{-2} dv \leqslant \\ \frac{2\pi}{x} \int_0^{x} g(v)\,dv + 4\pi x \int_x^{\pi} \frac{g(v)}{v^2}\,dv\,.$$

Отсюда и из (2.9) получаем

$$\frac{1}{6} N a_N \leqslant \sum_{n=1}^{N} \Big(1 - \frac{n}{N+1}\Big) \frac{n a_n}{(N+1)} \leqslant \\ \frac{2}{x} \int_0^x g(v)\, dv + 4x \int_x^\pi \frac{g(v)}{v^2}\, dv \leqslant 6 M_g(x). \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) вытекает (3.4). Лемма 3.2 доказана полностью.

Доказательство теоремы 4. Пусть выполнены условия (20) и (21). Поскольку по неравенству Харди (см. [4 , теорема 346])

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \Big(\sum_{n=1}^{N} a_n\Big)^p \leqslant (2p)^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\, a_n^p\,,$$

то из (3.2) получаем, что функция $h^* \in L^p_{2\pi}$ и верна оценка (22). Пункт a) доказан. Докажем пункт b). Если $h \in L^p_{2\pi}$, то по лемме 3.2 видим, что $A(N(x)) \leqslant 24 M_h(x)$ при всех $x \in (0, \pi]$ и

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(A(N))^p}{N(N+1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (A(N(x)))^p\, dx \leqslant (24)^p \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (M_h(x))^p\, dx\,.$$

Поскольку (см. [3 , гл. 1, оценки (3.17)])

$$\int_{-\pi}^{\pi} (M_h(x))^p\, dx \leqslant 4 \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^p\, dx\,,$$

то условие (21) выполнено и

$$\Big(\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} (A(N))^p\Big)^{1/p} \leqslant \frac{24p}{(p-1)} \Big(\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} dx\,.$$

Аналогично из (3.4) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\, a_n^p \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (N(x) a_{N(x)})^p\, dx \leqslant \\ (36)^p \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (M_h(x))^p\, dx \leqslant \Big(\frac{36p}{p-1}\Big)^p \frac{4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^p\, dx\,.$$

Поэтому выполнено и условие (20) и верна оценка (23). Теорема 4 полностью доказана.

Лемма 3.3. *Для любых натуральных чисел $m \geqslant k \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\sum_{n=k}^{\min\{m,2k\}} \frac{a_n}{n-k+1} \leqslant \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big|\, dx\,. \quad (3.7)$$

Более того, при $m \geqslant 2k$ верна оценка

$$\sum_{n=k}^{m} \frac{a_n}{n-k+1} \leqslant \Big(\frac{\ln(m/k)}{\ln(k+2)} + 1 \Big) \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big|\, dx\,. \tag{3.8}$$

Доказательство. При $m \geqslant k \geqslant 2$ имеем

$$\sum_{n=k}^{\min\{m,3k-3\}} \frac{a_n}{n-k+1} =$$

$$\Big| \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_1((k-1)x) \Big(\sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big) \Big(\sum_{n=1}^{2k-2} \frac{\sin(nx)}{n} \Big)\, dx \Big| \leqslant$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big|\, dx\ \max_x \Big| \sum_{n=1}^{2k-2} \frac{\sin(nx)}{n} \Big| \leqslant \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big|\, dx\,.$$

Отсюда получаем (3.7) при $k \geqslant 3$. Но

$$\frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big|\, dx \geqslant \Big| \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t(kx) \Big(\sum_{n=k}^{m} a_n\, t(nx) \Big)\, dx \Big| \geqslant 6a_k\,.$$

Значит, оценка (3.7) верна и при $k = 1$, и при $k = 2$ также.

Если $m \geqslant 2k$, то $\sum_{n=k}^{2k} \frac{a_n}{n-k+1} \geqslant a_{2k} \int_1^{k+2} \frac{dt}{t} = a_{2k}\, \ln(k+2)$. Значит,

$$\sum_{n=2k+1}^{m} \frac{a_n}{n-k+1} \leqslant a_{2k} \int_{k+1}^{m-k+1} \frac{dt}{t} \leqslant$$

$$a_{2k}\, \ln\Big(\frac{m}{k} \Big) \leqslant \frac{\ln(m/k)}{\ln(k+2)} \sum_{n=k}^{2k} \frac{a_n}{n-k+1}\,.$$

Отсюда и из (3.7) сразу вытекает (3.8). Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. *Если сумма $h(x)$ ряда* (1.1) *интегрируема на* $(0,\pi)$, *то верно неравенство*

$$B_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n+1-N_{j-1}} \leqslant \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\, h(x)\,|\, dx\,.$$

Доказательство. Достаточно в оценке (3.7) вставить $k = N_{j-1}$, $m = N_j - 1$ и затем полученные неравенства просуммировать по j.

Доказательство пункта b) теоремы 3. Для каждого натурального числа j имеем

$$\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{a_n}{n-N_{j-1}+1} \leqslant \sum_{n=N_{j-1}}^{V_j(N_{j-1})} \frac{a_n}{n+1-N_{j-1}} + 2 \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{a_n}{n}\,.$$

Суммируя эти оценки по всем натуральным j, получаем

$$B \leqslant B_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\,. \tag{3.9}$$

Пусть функция $h = g$ интегрируема на $(0,\pi)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}\Big)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx\,.$$

Отсюда из (3.9) и из леммы 3.4 видим, что $B \leqslant \big(\frac{6}{\pi}+1\big)\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx$. Поэтому условие (14) выполнено и верна первая оценка (16).

Если f^* интегрируема на $(0,\pi)$, то при $h=f$ верна лемма 3.4 и для каждого натурального числа N при $x \in \big[\frac{\pi}{4N+4}\,,\,\frac{\pi}{4N}\big]$ имеем

$$f^*(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) \geqslant \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{N} a_n \geqslant \frac{2}{3}\,Na_N\,.$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi/4} f^*(x)\,dx = \sum_{N=1}^{\infty}\int_{\pi/(4N+4)}^{\pi/(4N)} f^*(x)\,dx \geqslant \\ \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\pi}{4N(N+1)}\,\frac{2}{3}\,Na_N \geqslant \frac{\pi}{12}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{a_N}{N}\,.$$

Отсюда из леммы 3.4 и из (3.9) выводим, что $B \leqslant \frac{6}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\,dx + \frac{12}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\,dx$, т. е. условие (14) выполнено и верна вторая оценка (16). Пункт b) теоремы 3 доказан.

Доказательство пункта c) теоремы 3. Из (3.7) и (3.8) для каждого натурального числа j имеем оценку

$$\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \frac{a_n}{n-N_{j-1}+1} \leqslant \Big(\frac{\ln(N_j+1)}{\ln(N_{j-1}+1)}+1\Big)\,\frac{6}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} a_n\cos(nx)\Big|\,dx\,.$$

Суммируя эти оценки по всем натуральным j и используя (17), сразу получаем (18). Теорема 3 полностью доказана.

Библиографический список

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
2. *Белов А. С.* Оценки норм тригонометрических полиномов на интервалах и множествах // Analysis Math. 1979. Т. 5. № 2. С. 89—117.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.
4. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.