Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2006 С. 122 – 128

С. В. Колесников

О МНОЖЕСТВАХ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ДИРИХЛЕ

Найдена полная характеристика множеств всех точек несуществования угловых граничных значений функций, аналитических в круге и имеющих конечный интеграл Дирихле.

In the article functions analytic and having finite integral Diriclet in the unit circle are considered. In this case full characteristic of sets of nonexistence for boundary nontangential values is given.

УДК 517.514.

Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — функция, аналитическая в единичном круге $D : |z| < 1$; Γ — окружность $|z| = 1$. Если круг D является кругом сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$, то на окружности Γ могут быть его точки расходимости. Обозначим множество всех таких точек $\zeta \in \Gamma$ через $T(f)$. Известно, что $T(f)$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$.

Если f имеет конечный интеграл Дирихле

$$\int_D |f'(z)|^2 dxdy = \pi \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 k < \infty,$$

то, по теореме Берлинга, множество $T(f)$ имеет нулевую логарифмическую емкость.

Напомним, что логарифмической емкостью борелевского множества E называется величина $\mathrm{Cap}E = \sup \mu(E)$, где супремум берется по всем положительным борелевским мерам, сосредоточенным на E, для которых потенциал

$$\int_E \ln \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta)$$

не превосходит 1 на всей комплексной плоскости.

Ниже доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $E \subset \Gamma$ было множеством $T(f)$ для некоторой функции $f(z)$ с конечным интегралом Дирихле, необходимо и достаточно, чтобы E имело нулевую логарифмическую емкость и тип $G_{\delta\sigma}$ на окружности Γ.*

В дальнейшем ради удобства вместо ядра $\ln(1/|\zeta-z|)$ в определении логарифмической емкости возьмем ядро $\ln(2/|\zeta-z|)$. При этом семейство множеств емкости нуль относительно нового ядра совпадает с семейством множеств логарифмической емкости нуль.

Для произвольной меры μ через $U_\mu(z)$ будем обозначать потенциал относительно нового ядра:

$$U_\mu(z)=\int_E \ln\frac{2}{|\zeta-z|}\,d\mu(\zeta).$$

Для доказательства теоремы потребуется следующая лемма, метод доказательства которой аналогичен примененному в [3].

Лемма 1. *Пусть множество $E\subset\Gamma$ имеет нулевую логарифмическую емкость и тип G_δ, тогда существует непрерывная мера μ (вообще говоря, не положительная), сосредоточенная на Γ, полная вариация которой не превосходит 1, такая, что:*

1) *потенциал U_μ ограничен, $0<U_\mu(z)<1$;*

2) *$U_\mu(z)$ имеет конечный интеграл Дирихле*

$$D(U_\mu)=\int_D\left(\left(\frac{\partial U_m u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_m u}{\partial y}\right)^2\right)dxdy\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2;$$

3) *$U_\mu(z)$ имеет радиальные пределы в точках $\zeta\in\Gamma\setminus E$;*

4) *$U_\mu(z)$ в точках $\zeta\in E$ имеет колебание по радиусам, равное 1;*

5)
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \zeta^n d\mu(\zeta)=0. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathrm{O}}_n\subset\Gamma$, $n=1,2,\ldots,$ — открытые множества на Γ такие, что $E=\cap_{n=1}^\infty\tilde{O}_n$.

Построим последовательность положительных мер μ_n и последовательность открытых множеств G_n, $n=0,1,\ldots,$ удовлетворяющих следующим свойствам:

(а) $\cap_{n=1}^\infty G_n=E$, $G_n\subset G_{n-1}$;
(б) $U_{\mu_n}(z)\leqslant 1$, $z\in D$;
(в) $U_{\mu_n}(z)>1-1/2^n$, $z\in D\cap G_n$;
(г) $U_{\mu_n}(z)<1/2^n$, $z\in D\setminus G_{n-1}$, $n>0$;
(д) $\mu_n(\Gamma)<1/2^n$.

Построение будем проводить по индукции.

Возьмем множество $\tilde{O}_1$. Так как $\mathrm{Cap}E=0$ и борелевские множества измеримы относительно логарифмической емкости [2, гл. 3, теорема 7], то найдется открытое на окружности Γ множество O_1, $E\subset O_1\subset\tilde{O}_1$, такое, что $\mathrm{Cap}(O_1)<1/2$. В качестве μ_1 возьмем равновесную меру для O_1. При этом потенциал $U_{\mu_1}(z)$ непрерывен и равен 1 на O_1.

Для каждой точки $\zeta\in O_1$ возьмем окрестность, в которой имеет место неравенство $U_{\mu_1}(z)>1-1/2$ и пересечение которой с Γ содержится в $\tilde{O}_1$. В качестве G_1 возьмем объединение всех таких окрестностей.

Очевидно, μ_1 и G_1 удовлетворяют (б), (в) и (д).

Предположим теперь, что меры μ_k и открытые множества G_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, уже построены.

Мера μ_n и G_n строятся следующим образом.

Разобьем каждую из открытых дуг, составляющих множество $\tilde{O}_n \cap G_{n-1}$, двумя последовательностями, сходящимися к ее концам. При этом, т. к. $\mathrm{Cap}(E) = 0$, а логарифмическая емкость любой невырожденной дуги положительна, точки разбиения можно выбрать из $\Gamma \setminus E$. Совокупность всех полученных дуг расположим в последовательность γ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим через ρ_k расстояние от дуги γ_k до границы области G_{n-1}.

Поскольку логарифмическая емкость пересечения $E \cap \gamma_k$ равна нулю, то можно найти такое открытое на Γ множество P_k, что $E \cap \gamma_k \subset P_k \subset \gamma_k$ и

$$\mathrm{Cap}(P_k) < \frac{1}{2^{n+k} \ln(2/\rho_k)}.$$

Пусть μ_n — равновесная мера множества $O_n = \cup_{k=1}^{\infty} P_k$, а ν_k — сужение меры μ_n на интервал γ_k. Тогда

$$U_{\nu_k}(z) \leqslant U_{\mu_n}(z) \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно,

$$\mu_n(\gamma_k) = \nu_k(\Gamma) \leqslant \mathrm{Cap}(P_k) < \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Отсюда следует, что мера μ_n удовлетворяет неравенству (д):

$$\mu_n(\Gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\gamma_k) < \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{n+k} = 1/2^n.$$

При $z \notin G_{n-1}$ имеем оценку

$$U_{\mu_n}(z) = \int_{\Gamma} \ln \frac{2}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_k} \ln \frac{2}{\rho_k}\, d\mu(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n},$$

т. е. выполняется условие (г).

Далее, поскольку потенциал $U_{\mu_n}(z)$ непрерывен и равен 1 на O_n, то для каждой точки множества O_n существует окрестность, в которой выполняется неравенство $U_{\mu_n}(z) > 1 - 1/2^n$ и пересечение которой с Γ содержится в O_n. В качестве G_n возьмем объединение всех таких окрестностей. Очевидно, (в) будет выполнено на G_n.

Из (в) и (г) следует, что $G_n \subset G_{n-1}$, а поскольку по построению G_n будет $G_n \cap \Gamma \subset O_n \subset \tilde{O}_n$, то выполнено (а).

Наконец, свойство (б) выполняется потому, что $U_{\mu_n}(z)$ — равновесный потенциал.

Положим теперь

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \mu_n$$

и покажем, что логарифмический потенциал U_μ меры μ ограничен в D и не имеет радиальных пределов в точках множества E.

Действительно, на O_{n-1} — носителе мер μ_n и μ_{n-1} — выполняется неравенство $U_{\mu_n}(z) \leqslant U_{\mu_{n-1}}(z)$, поэтому оно выполняется на всей комплексной плоскости [2], и, значит, последовательность $U_{\mu_n}(z)$ монотонно убывает. Отсюда следует, что

$$U_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_{\mu_n}(z) \tag{2}$$

ограничен в D: $0 < U_\mu(z) \leqslant 1$. Кроме того, если n нечетно, то

$$U_{\mu_n}(z) - U_{\mu_{n+1}}(z) < U_\mu(z) < U_{\mu_1}(z) - U_{\mu_{n+1}}(z) + U_{\mu_{n+2}}(z).$$

Отсюда если $\zeta \in D$ лежит на границе множества G_n, то, в силу свойств (в) и (г), $U_{\mu_n}(z) \geqslant 1 - 1/2^n$, $U_{\mu_{n+1}}(z) < 1/2^{n+1}$, и, следовательно,

$$1 - \frac{3}{2^{n+1}} < U_\mu(z), \quad z \in D \cap \partial G_n. \tag{3}$$

С другой стороны, т. к. на границе области G_{n+1} будет $1 > U_{\mu_1}(z) > U_{\mu_{n+1}}(z) > 1 - 1/2^{n+1}$, $U_{\mu_{n+2}}(z) < 1/2^{n+2}$, то

$$U_\mu(z) < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{3}{2^{n+2}}, \quad z \in D \cap \partial G_{n+1}. \tag{4}$$

Поскольку радиус круга D с концом в точке $\zeta \in E$ пересекает границу каждого множества G_n, $n = 1, 2, \ldots$, то из (3) и (4) следует, что в точке ζ колебание функции $U_\mu(z)$ по радиусу круга D равно 1.

Покажем, что в точках $\zeta \in \Gamma \setminus E$ потенциал U_μ имеет радиальный предел.

Пусть $z_0 \in \Gamma$ и точка z лежит на радиусе круга D, оканчивающемся в z_0. Тогда при $\zeta \in \Gamma$ будет $|\zeta - z_0| < 2|\zeta - z|$ и

$$\ln \frac{2}{|\zeta - z|} < \ln \frac{2}{|\zeta - z_0|} + \ln 2. \tag{5}$$

Поскольку $U_{\mu_n}(z_0) = \int_\Gamma \ln \frac{2}{|\zeta - z_0|}\, d\mu_n(\zeta) \leqslant 1$, то из (5) по теореме Лебега следует, что $U_{\mu_n(z)}$ имеет радиальный предел в точке z_0.

Если $\zeta \in \Gamma \setminus E$, то найдется такое натуральное N, начиная с которого $\zeta \notin G_n$. Тогда, по построению множеств G_n, при $n > N$ радиус, оканчивающийся в точке z_0, не пересекается с G_n, и, следовательно, на нем имеет место неравенство (г). Отсюда получаем, что ряд (2) сходится равномерно на этом радиусе, и в точке z_0 функция $U_\mu(z)$ имеет радиальный предел.

Так как меры μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, абсолютно непрерывны, то

$$\lim_{k\to\infty} \int \zeta^k d\mu_n(\zeta) = 0.$$

Поэтому для любого N

$$\lim_{k\to\infty} \int \zeta^k d\mu(\zeta) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int \zeta^k d\mu_n(\zeta) + \lim_{k\to\infty} \int \zeta^k d\nu(\zeta) = \lim_{k\to\infty} \int \zeta^k d\nu(\zeta),$$

где $\nu = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n$.

Так как по (д)

$$\left|\int \zeta^k d\nu(\zeta)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N},$$

то отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int \zeta^k d\mu(\zeta) = 0.$$

Для доказательства ограниченности интеграла Дирихле заметим, что $\sqrt{D(f)}$ является нормой в пространстве функций с ограниченным интегралом Дирихле и что

$$D(U_{\mu_n}) = \int U_{\mu_n}(z) d\mu_n(z) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Откуда следует, что $\sqrt{D(U_\mu)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{D(U_\mu)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Пусть $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, где E_n типа G_δ, $\mathrm{Cap}(E_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Для каждого множества E_n найдем меру μ_n, удовлетворяющую лемме 1.

Положим $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n / 10^n$. Очевидно, мера μ непрерывна.

Рассмотрим интеграл

$$F_\mu(z) = \int_\Gamma \ln(1 - z/\zeta)\, d\mu(\zeta) = \int_\Gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\zeta^n}\, d\mu(\zeta).$$

Очевидно, что $F_\mu(z)$ аналитична в D и

$$\mathrm{Re}F_\mu(z) = \int_\Gamma \ln|\zeta - z| d\mu(\zeta) = -U_\mu(z) + \mu(\Gamma)\ln 2,$$

$$\mathrm{Im}F_\mu(z) = \int_\Gamma \arg(1 - z/\zeta) d\mu(\zeta),$$

где ветвь $\ln(1+w)$ выбрана так, что $|\mathrm{Im}\ln(1-w)| < \pi/2$, $z \in D$.

Отсюда, т. к. $\arg(1-z/\zeta)$ непрерывна всюду на Γ кроме точки $z = \zeta$ и мера μ непрерывна, то $\mathrm{Im}F_\mu(z)$ непрерывна.

Поскольку

$$\mathrm{Re}F_\mu(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{\mu_n}(z)}{10^n} + \mu(\Gamma)\ln 2$$

и последний ряд сходится равномерно в круге D, то $\mathrm{Re}F_\mu(z)$ имеет радиальные пределы в тех точках $\zeta \in \Gamma$, в которых имеют радиальные пределы все потенциалы $U_{\mu_n}(z)$, т. е. в точках $\zeta \in \Gamma \setminus E$.

Пусть $\zeta \in E$ и N — наименьшее натуральное число, для которого $\zeta \in E_n$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{\mu_n}(z)}{10^n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{U_{\mu_n}(z)}{10^n} + \frac{U_{\mu_N}(z)}{10^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{U_{\mu_n}(z)}{10^n}. \tag{6}$$

Первая сумма имеет радиальный предел в точке ζ. Второе слагаемое $U_{\mu_N}(z)$ имеет в точке ζ колебание по радиусу, равное $1/10^N$. Модуль третьего слагаемого не превосходит $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9 \cdot 10^N}$. Отсюда следует, что колебание суммы (6) в точке ζ по радиусу не менее $8/9 \cdot 10^N$, т. е. в точке ζ действительная часть $\mathrm{Re} F_\mu(z)$ не имеет радиального предела.

Таким образом, множество всех точек, в которых функция $F_\mu(z)$ не имеет радиальных пределов, совпадает с E.

Нетрудно показать, что мера μ так же, как и меры μ_n, удовлетворяет условию $\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \zeta^n d\mu(\zeta) = 0$. Действительно,

$$|\int_\Gamma \zeta^n d\mu(\zeta)| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_\Gamma \frac{\zeta^n}{10^k} d\mu_k(\zeta) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_\Gamma \frac{\zeta^n}{10^k} d\mu_k(\zeta) + \frac{1}{9 \cdot 10^N}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma z^n d\mu_k(\zeta) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma z^n d\mu(\zeta) = 0$.

Таким образом, коэффициенты Тейлора $c_n = (\int_\Gamma z^n d\mu(\zeta))/n$ для функции $F_\mu(z)$ удовлетворяют условию $c_n = o(1/n)$. По теореме Таубера [1, с. 595] отсюда следует, что если в точке ζ функция $F_\mu(z)$ имеет радиальный предел, то ее ряд Тейлора сходится в точке ζ. С другой стороны, по теореме Абеля из сходимости ряда Тейлора в точке следует существование в этой точке углового предела. Все это показывает, что для функции F_μ ряд Тейлора расходится в тех и только в тех точках, в которых она имеет радиальные пределы, т. е. $T(F_\mu) = E$.

По п. 2 леммы 1

$$\sqrt{D(U_\mu)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \sqrt{D(U_{\mu_n})} < \infty.$$

Поскольку в силу условий Коши — Римана интеграл Дирихле функции F совпадает с интегралом Дирихле от ее действительной части, т. е. с $D(U_\mu)$, то он ограничен.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971.
3. *Колесников С. В.* О множествах расходимости рядов Тейлора ограниченных аналитических функций // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 130—134.