Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2006 С. 128 – 132

Д. И. Молдаванский

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ *P*-ГРУППАМИ *HNN*-РАСШИРЕНИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Получено необходимое и достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения конечно порожденной нильпотентной группы с конечными связанными подгруппами.

The necessary and sufficient condition for HNN-extension of finitely generated nilpotent group with finite associated subgroups to be residually a finite p-group is obtained.

УДК 512.543.

Пусть G — некоторая группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ — HNN-расширение группы G с проходной буквой t и связанными подгруппами A и B, т. е., напомним, группа G^* порождается элементами, порождающими группу G, и еще одним элементом t и определяется всеми соотношениями группы G и всевозможными соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$, где $a \in A$. При этом группа G называется базовой группой HNN-расширения.

Напомним также, что если $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, то говорят, что группа G аппроксимируема группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируема), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ этого элемента отличен от 1.

Таким образом, если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Здесь будет рассматриваться свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, где для простого числа p через $\mathcal{F}_p$ обозначен класс всех конечных p-групп.

Хорошо известно (см. [2, 3]), что если группа G является конечной или группа G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой, а ее подгруппы A и B конечны, то группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема. Тем не менее уже HNN-расширение конечной p-группы далеко не всегда является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Соответствующий критерий (см. [1]) может быть сформулирован следующим образом:

Теорема 1. *Пусть G — конечная p-группа. Группа G^* является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда существует главный ряд*

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$$

группы G, удовлетворяющий следующим двум условиям:

(1) $(A \cap G_i)\varphi = B \cap G_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$;

(2) *для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и для каждого элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ элементы $a\varphi$ и a сравнимы по модулю подгруппы G_i.*

(Напомним, что главным рядом некоторой группы G называется ее нормальный ряд, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений. Нетрудно видеть, что нормальный ряд конечной p-группы является главным в точности тогда, когда все его факторы имеют порядок p.)

Нашей целью является доказательство следующего утверждения, представляющего собой обобщение этой теоремы:

Теорема 2. *Пусть группа G является конечно порожденной нильпотентной, а ее подгруппы A и B — конечными. Предположим, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, т. е. ее периодическая часть $T = \tau G$ является конечной p-группой. Группа G^* является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда существует главный ряд*

$$1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_{n-1} \leqslant T_n = T$$

группы T, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) $(A \cap T_i)\varphi = B \cap T_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$;

(2) *для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и для каждого элемента $a \in A \cap T_{i+1}$ элементы $a\varphi$ и a сравнимы по модулю подгруппы T_i;*

(3) *для любого $i = 0, 1, \ldots, n$ T_i является нормальной подгруппой группы G.*

Таким образом, теорема 2 доставляет критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения конечно порожденной нильпотентной группы при условии конечности связанных подгрупп. Аналогичный критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с объединенными конечными подгруппами получен Д. Н. Азаровым (см. его статью в этом же “Вестнике”).

Непосредственно проверяется, что подгруппа T^* группы G^*, порождаемая подгруппой T и элементом t, является HNN-расширением вида $(T, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$. Поскольку произвольная подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, существование главного ряда группы T, удовлетворяющего требованиям теоремы 1, как необходимого условия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G^* вполне естественно. Теорема 2 утверждает, что необходимым и достаточным условием $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G^* является существование хотя бы одного такого ряда, все члены которого являются к тому же нормальными подгруппами группы G. Следующий пример показывает, что одна лишь $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы T^* не гарантирует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G^*.

Пусть K — четверная группа Клейна, a, b, c — все неединичные элементы группы K и A, B, C — циклические подгруппы, порождаемые этими элементами. Обозначим через G расщепляемое расширение группы K при помощи бесконечной циклической группы с порождающим d, соответствующее автоморфизму группы K, действие которого совпадает с транспозицией элементов a и c. Таким образом, в группе G выполнены равенства $d^{-1}ad = c$, $d^{-1}cd = a$ и $d^{-1}bd = b$, так что подгруппа B лежит в ее центре, а фактор-группа G/B абелева. Следовательно, группа G нильпотентна; ее периодическая часть совпадает, очевидно, с подгруппой K.

HNN-расширение $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ группы G с проходной буквой t и связанными (относительно очевидного изоморфизма φ) подгруппами A и B в силу теоремы 2 не является $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемой группой, поскольку единственным главным рядом группы K, все члены которого нормальны в группе G, является ряд $1 < B < K$, не удовлетворяющий, очевидно, условию (1) в формулировке теоремы. С другой стороны, группа $K^* = (K, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ $\mathcal{F}_2$-аппроксимируема, т. к. ряд $1 < C < K$ удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Приступая к доказательству теоремы 2, предположим сначала, что группа G^* $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Так как ее подгруппа T конечна, найдется нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G^* такая, что $T \cap N = 1$. Пусть

$$1 = X_0/N \leqslant X_1/N \leqslant \cdots \leqslant X_m/N = G^*/N$$

— некоторый главный ряд конечной p-группы G^*/N. Тогда все факторы последовательности

$$N = X_0 \leqslant X_1 \leqslant \cdots \leqslant X_m = G^*$$

нормальных подгрупп группы G^* имеют порядок p, и, полагая для $i = 0, 1, \ldots, m$ $T_i = T \cap X_i$, получаем последовательность

$$1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_m = T$$

нормальных подгрупп группы T, порядок каждого фактора которой равен 1 или p. Поскольку подгруппы T и $G \cap X_i$ нормальны в группе G и $T_i = T \cap (G \cap X_i)$, каждая подгруппа T_i является нормальной в G. Имеем далее

$$(A \cap T_i)\varphi = (A \cap X_i)\varphi = t^{-1}(A \cap X_i)t = B \cap X_i = B \cap T_i.$$

Для произвольного i, $0 \leqslant i \leqslant m - 1$, X_{i+1}/X_i является нормальной подгруппой порядка p конечной p-группы G^*/X_i и потому лежит в центре этой группы. Следовательно, для любого $x \in X_{i+1}$ выполнено сравнение $t^{-1}xt \equiv x \pmod{X_i}$. В частности, для произвольного элемента $a \in A \cap X_{i+1}$ имеем

$$a\varphi = t^{-1}at \equiv a \pmod{X_i}$$

и, т. к. элементы a и $a\varphi$ принадлежат подгруппе T, получаем $a\varphi \equiv a \pmod{T_i}$. Таким образом, последовательность

$$1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_m = T$$

после отбрасывания повторяющихся членов оказывается главным рядом группы T, удовлетворяющим всем требованиям формулировки теоремы 2.

Обратно, предположим, что некоторый главный ряд

$$1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_n = T$$

обладает свойствами (1), (2) и (3) из формулировки теоремы 2. Доказательство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G^* начнем со следующего замечания.

Пусть N — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G такая, что $T \cap N = 1$. Тогда ограничение естественного отображения группы G на фактор-группу $\overline{G} = G/N$ является изоморфизмом группы T на подгруппу $\overline{T} = TN/N$, при котором изоморфизму φ соответствует изоморфизм $\overline{\varphi}_N$ подгруппы $\overline{A} = AN/N$ на подгруппу $\overline{B} = BN/N$. Кроме того, главный ряд

$$1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_n = T$$

группы T переходит в главный ряд

$$0 = \overline{T}_0 \leqslant \overline{T}_1 \leqslant \cdots \leqslant \overline{T}_n = \overline{T}$$

группы $\overline{T}$ (где для $i = 0, 1, \ldots, n$ $\overline{T}_i = T_iN/N$), удовлетворяющий аналогам свойств (1) и (2). Так как группа $\overline{G}$ является конечной p-группой и для каждого $i = 0, 1, \ldots, n$ подгруппа $\overline{T}_i$ нормальна в ней, этот ряд может быть достроен до главного ряда группы $\overline{G}$, удовлетворяющего, очевидно, условиям теоремы 1. Поэтому HNN-расширение

$$\overline{G}^*_N = (\overline{G}, t;\ t^{-1}\overline{A}\,t = \overline{B}, \overline{\varphi}_N)$$

группы $\overline{G}$ в силу этой теоремы является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Легко видеть также, что естественное отображение группы G на группу $\overline{G}$ продолжаемо до гомоморфизма ρ_N группы G^* на группу $\overline{G}^*_N$.

Таким образом, для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G^* достаточно для любого ее неединичного элемента g указать имеющую тривиальное пересечение с T нормальную подгруппу N конечного p-индекса группы G такую, что образ элемента g при гомоморфизме ρ_N отличен от 1.

Пусть $g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n$ — приведенная запись элемента g. Если $n = 0$, т. е. элемент g принадлежит подгруппе G, существование такой подгруппы N следует очевидным образом из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G, конечности подгруппы T и того, что отображение ρ_N на подгруппе G группы G^* совпадает с естественным гомоморфизмом группы G на фактор-группу G/N.

Предположим, что $n > 1$. Фиксируем произвольную нормальную подгруппу N_0 конечного p-индекса группы G такую, что $T \cap N_0 = 1$, и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ выберем в группе G нормальную подгруппу N_i следующим образом.

Если $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \neq 0$, полагаем $N_i = N_0$.

Если $\varepsilon_i = -1$ и $\varepsilon_{i+1} = 1$, то элемент g_i не принадлежит подгруппе A, и, т. к. в $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группе конечные подгруппы

$\mathcal{F}_p$-отделимы, можно выбрать нормальную подгруппу N_i конечного p-индекса группы G так, чтобы $g_i \notin AN_i$.

Аналогично, если $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$, выберем нормальную подгруппу N_i конечного p-индекса группы G так, чтобы $g_i \notin BN_i$.

Полагая теперь $N = \bigcap_{i=0}^{n} N_i$, имеем $T \cap N = 1$, и, т. к. запись

$$g\rho_N = (g_0N)t^{\varepsilon_1}(g_1N)t^{\varepsilon_2}(g_2N)\cdots(g_{n-1}N)t^{\varepsilon_n}(g_nN)$$

элемента $g\rho_N$ является приведенной в группе $\overline{G}_N^*$, подгруппа N искомая. Теорема 2 доказана.

Автор благодарен А. Ю. Ольшанскому, замечания которого привели к упрощению первоначального варианта доказательства теоремы 2.

Библиографический список

1. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами *HNN*-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. Иваново, 2000. Вып. 3. С. 129—140.
2. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite *HNN* extensions // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6. P. 179—194.
3. *Cohen D.* Residual finiteness and Britton's lemma // J. London Math. Soc. (2). 1977. Vol. 16. P. 232—234.