Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2006 С. 147 – 153

Д. В. Туртин

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Доказана теорема единственности решения задачи Коши для общих эволюционных систем линейных дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными.

It is proved the uniqueness theorem of Cauchy problem for general evolutional systems of linear differential equations with two independent variables.

УДК 517.955.

В статье исследуется вопрос единственности решения задачи Коши для систем линейных уравнений с переменными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^m U(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n_j} A_{kj}(x) \frac{\partial^{k+j} U(x,t)}{\partial x^k \partial t^j}, \tag{1}$$

где $t \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$, $A_{kj}(x)$ — квадратные матрицы порядка s, элементы $a_{pq}^{kj}(x)$ которых есть комплекснозначные непрерывно дифференцируемые функции.

Первые, основополагающие результаты в этом направлении для уравнений с "медленно" растущими коэффициентами были получены Я. И. Житомирским [2].

Н. С. Максимовская [5] обобщила результат Я. И. Житомирского на соответствующие системы уравнений. Однако уравнения и системы уравнений, рассматриваемые в [2] и [5], обладали одной особенностью: корни соответствующих им характеристических уравнений имели одинаковый степенной порядок роста по λ при $\lambda \to \infty$. Н. Г. Косарев [4] изучил уравнения, характеристические уравнения которых имеют корни, вообще говоря, различного степенного роста по λ при $\lambda \to \infty$. Эти уравнения как частный случай включают в себя уравнения, изученные в [2].

В предлагаемой работе автор обобщает результат [4] на системы уравнений (1). Отметим также, что системы (1) как частный случай включают в себя системы уравнений, изученные в [5].

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений в частных производных вида (1) при начальных условиях

$$\frac{\partial^j U(x,t)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = f_j(x) \quad (j = \overline{0, m-1}) \tag{2}$$

© Д. В. Туртин, 2006

в полуплоскости $\Pi = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, 0 \leqslant t < \infty\}$.

Будем рассматривать только такие решения уравнения (1), которые имеют экспоненциальный тип по t, что означает, что сами эти решения и все их производные, входящие в (1), растут по t при $t \to \infty$ не быстрее, чем $\exp(\alpha t)$ при некотором $\alpha > 0$.

Далее рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, двойственную (1):

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj}(x) \lambda^j \frac{d^k Y(x,\lambda)}{dx^k} = 0, \tag{3}$$

где

$$n = \max_{j=\overline{0,m-1}} n_j,$$

$Y(x,\lambda) = (y_1(x,\lambda), ..., y_s(x,\lambda))^T$ — искомая вектор-функция, $\lambda \in \Lambda \subset C$, $m_k \, (k = \overline{0,m})$ — натуральные числа. Очевидно, что $m_0 = m > m_k$, $k = \overline{1,n}$. Обозначим

$$\Delta = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj}(x) \lambda^j \omega^k.$$

Тогда системе (3) соответствует характеристическое уравнение

$$\det(\Delta) = 0. \tag{4}$$

Далее диаграмму Ньютона [7] многочлена Δ отождествим с диаграммой Ньютона такого же многочлена со скалярными коэффициентами.

Введем основные обозначения. Предположим, что диаграмма Ньютона уравнения (4) при любом x $(-\infty < x < \infty)$ имеет одни и те же узловые точки $(sK_{l-1}; sm_{K_{l-1}})$ $(l = \overline{1,N}\,; K_0 = 0)$, определяющие N звеньев, и точки $(\alpha_{lj}; m_{\alpha_{lj}})\,(j = \overline{1,p_l}$, $l = \overline{1,N}$, $\alpha_{lp_l} = sK_l)$, лежащие на l-м звене данной диаграммы. Нами установлено*, что диаграммы Ньютона многочленов Δ и $\det(\Delta)$ подобны с коэффициентом подобия s. Поэтому, как и в [4], обозначим $\gamma_l \, (l = \overline{1,N})$ показатели асимптотического разложения корней уравнения (4) по степеням λ в окрестности точки $\lambda = \infty$. Известно [3], что

$$\min_{l} \gamma_l = \gamma_1$$

и $\gamma_1 = {p_0}^{-1}$, где p_0 — приведенный порядок [1] системы (1).

Пусть $\Gamma(l) = \{\alpha_{lj} : j = \overline{0,p_l}\}$, $l = \overline{1,N}$, $\Gamma = \cup_{l=1}^{N} \Gamma(l)$, $d_k = m_{K_{l-1}} + (K_{l-1} - k)\gamma_l$ при $K_{l-1} \leqslant k \leqslant K_l$, $l = \overline{1,N}$.

Мы будем рассматривать только такие системы дифференциальных уравнений вида (3), у которых характеристическое уравнение (4) удовлетворяет условиям:

1) матричные функции $A_{km_k}(x)$ при $k \in \Gamma$ есть матрицы с постоянными элементами, т. е. $A_{km_k}(x) \equiv A_{km_k}$;

*Статья готовится к печати (Математика и ее приложения: Журн. Иван. мат. об-ва. 2006. Вып. 3).

2) уравнения

$$\det\{A_{K_{l-1}m_{K_{l-1}}} + \sum_{i=1}^{p_l} A_{\alpha_{li}m_{\alpha_{li}}}\beta^{\alpha_{li}-K_{l-1}}\} = 0, \tag{5}$$

$l = \overline{1,N}$, не имеют кратных корней и матрицы $A_{K_l m_{K_l}}$ не вырождены;

3) корни β_{lj} ($l = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,sq_l}$, $q_l = K_l - K_{l-1}$) уравнений (5) удовлетворяют условиям: ни один из лучей

$$\arg\lambda = \arg(\beta_{lj} - \beta_{li}) \pm \frac{\pi}{2}\gamma_l, \quad \arg\lambda = \arg\beta_{lj} \pm \frac{\pi}{2}$$

($l = \overline{1,N}, j = \overline{1,sq_l}, i \neq j$) не лежит на мнимой оси.

Пусть $H(x) > 0$, $h(x) > 0$ — четные возрастающие при $x > 0$ функции, удовлетворяющие условию

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{h(x)} = 0. \tag{6}$$

Определим функцию $g(x)$ соотношением

$$h(g(x)) = \delta x \quad (x > 0, \delta > 0). \tag{7}$$

Нами найдена** асимптотика фундаментальной системы решений для (3), а именно доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть элементы $a_{pq}^{kj}(x)$ матриц $A_{kj}(x)$ уравнения (4) удовлетворяют условиям 1) — 3) и оценкам*

$$\int_{-r}^{r} |\frac{d}{dx} a_{pq}^{kj}(x)|\, dx \leqslant h^{d_k - j}(r), \tag{8}$$

$l = \overline{1,N}$, $K_{l-1} \leqslant k \leqslant K_l$, $1 \leqslant p,q \leqslant s$, $j = \overline{0,m_k}$. Тогда при $|x| \leqslant g(|\lambda|)$ уравнение (3) имеет sn линейно независимых решений вида

$$Y_{ljk}(x,\lambda) = \phi_{ljk}(x,\lambda) \exp\,(\int_0^x \omega_{lj}(\tau,\lambda)\, d\tau), \tag{9}$$

где $l = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,sq_l}$, $k = \overline{1,n}$, $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $|x| \leqslant g(|\lambda|)$, $\omega_{lj}(x,\lambda)$ ($l = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,sq_l}$) — корни характеристического уравнения (4) с асимптотикой

$$\omega_{lj}(x,\lambda) = \beta_{lj}\lambda^{\gamma_l}(1 + o(1)), \tag{10}$$

где β_{lj} ($l = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,sq_l}$) — корни уравнений (5); $o(1) = \psi(x,\lambda)$ — функции, которые стремятся к 0 при $\lambda \to \infty$, $|x| \leqslant g(|\lambda|)$. Вектор-функции $\phi_{ljk}(x,\lambda)$ удовлетворяют неравенству

$$\|\phi_{ljk}(x,\lambda)\| \leqslant c_1|\lambda|^{c_2} \tag{11}$$

($l = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,sq_l}$, $k = \overline{1,sn}$, $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $|x| \leqslant g(|\lambda|)$).

Ниже во всей статье буквой c с различными индексами обозначаются некоторые положительные постоянные.

В следующей теореме будут установлены классы единственности решения задачи Коши (1) — (2).

**См. примеч. *

Теорема 2. *Пусть* $H_1(x) > 0$, $H_2(x) > 0$ *— четные возрастающие при* $x > 0$ *функции, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H_2(x)}{H_1(x)} = 0. \tag{12}$$

Функция $g(x)$ *определяется соотношением*

$$H_1(g(x)) = \delta x^{\gamma_1} \ (x > 0,\ \delta > 0), \tag{13}$$

где γ_1 *находится по уравнению (4). Если элементы* $a_{pq}^{kj}(x)$ *матриц* $A_{kj}(x)$ *уравнения (4) удовлетворяют условиям 1) — 3) и оценкам*

$$\int_{-r}^{r} |\frac{d}{dx} a_{pq}^{kj}(x)|\, dx \leqslant {H_1}^{(d_k - j)p_0}(r) \tag{14}$$

$(K_{l-1} \leqslant k \leqslant K_l)$, *то всякое решение* $U(x,t)$ *системы (1) с начальным условием (2) при* $f_j(x) = 0\,(j = \overline{0, m-1})$, *удовлетворяющее при каком-либо* $\alpha > 0$ *оценке*

$$\|\frac{\partial^k U(x,t)}{\partial x^k}\| \leqslant c_3 \exp\left(\alpha t + |\int_0^x H_1(\theta)\, d\theta|\right) \tag{15}$$

$(k = \overline{0, n-1},\ x \in R,\ t \geqslant 0)$, *равно тождественно нулю при условии, что*

$$\int_1^\infty (H_1(\theta))^{1-p_0} d\theta = \infty. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $U(x,t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее оценке (15) и начальному условию (2) при $f_j(x) = 0\,(j = \overline{0, m-1})$, $Y(x,\lambda)$ — его преобразование Лапласа по переменной t. Из (15) следует, что функция $Y(x,\lambda)$ при каждом фиксированном x аналитична и ограничена по λ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \alpha > 0$, удовлетворяет уравнению (3), а также оценкам

$$\|\frac{\partial^k Y(x,\lambda)}{\partial x^k}\| \leqslant c_4 \exp\left(|\int_0^x H_1(\tau)\, d\tau|\right) \tag{17}$$

$(k = \overline{0, n-1},\ x \in R,\ \operatorname{Re}\lambda > \alpha > 0)$.

Пусть $H(x)$ и $h(x)$ — функции, определяемые равенствами: $H^{\gamma_1}(x) = H_2(x)$, $h^{\gamma_1}(x) = H_1(x)$. Из (12) следует, что $H(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условию (6), а из (13) находим, что для $h(x)$ и $g(x)$ выполняется соотношение (7). Кроме того, из неравенств (14) вытекает справедливость оценок (8) с функцией $H(x) = H_2^{p_0}(x)$. Учитывая условия теоремы 2, заключаем, что для системы (3) с характеристическим уравнением (4) выполнены все условия теоремы 1. Поэтому уравнение (3) имеет sn линейно независимых решений $Y_{lj}(x,\lambda)$ $(l = \overline{1, N},\ j = \overline{1, sq_l},\ q_l = K_l - K_{l-1})$, обладающих в области $|x| \leqslant g(|\lambda|)$ асимптотикой (9). Тогда

$$Y(x,\lambda) = \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{sq_l} c_{lj}(\lambda) Y_{lj}(x,\lambda), \tag{18}$$

где $c_{lj}(\lambda)$ $(l=\overline{1,N},\ j=\overline{1,sq_l})$ — некоторые функции от λ.

Дифференцируя тождество (18) $n-1$ раз по x и решая полученную систему из sn уравнений относительно $c_{lj}(\lambda)$, получим

$$c_{lj}(\lambda)=V^{-1}(x,\lambda)\tilde V_{lj}(x,\lambda), \tag{19}$$

где $V(x,\lambda)$ — вронскиан вектор-функций $Y_{lj}(x,\lambda)$, а $\tilde V_{lj}(x,\lambda)$ получается из $V(x,\lambda)$ заменой $(q_1+\dots+q_{l-1}+j)$-го столбца столбцом $(Y(x,\lambda),\ \dots,\ Y^{(n-1)}(x,\lambda))^T$.

Из (19), учитывая (11) и (17), получим

$$|c_{lj}(\lambda)|\leqslant c_5|\lambda|^{c_6}\exp\,(|\int_0^x H_1(\theta)\,d\theta|-\int_0^x \operatorname{Re}\omega_{lj}(\theta,\lambda)\,d\theta) \tag{20}$$

$(l=\overline{1,N},\ j=\overline{1,sq_l},\ \lambda=\sigma_0+i\tau,\ |x|\leqslant g(|\lambda|))$.

Заметим, что из условия 3), соотношения (13) и асимптотики (10) вытекает

$$|\cos(\arg\omega_{lj}(x,\lambda))|\geqslant c>0$$

$(l=\overline{1,N},\ j=\overline{1,sq_l},\ \lambda=\sigma_0+i\tau,\ |x|\leqslant g(|\lambda|))$, где $\tau\geqslant\tau_0$ или $\tau\leqslant-\tau_0$ (τ_0 достаточно велико), поэтому

$$|\operatorname{Re}\omega_{lj}(x,\lambda)|\geqslant c_0|\omega_{lj}(x,\lambda)| \tag{21}$$

при тех же значениях l,j,λ,x.

Из (21) следует, что при выполнении условий 3) величины $\operatorname{Re}\omega_{lj}(x,\lambda)$ сохраняют знак при $\lambda=\sigma_0+i\tau$ ($\tau>0$ или $\tau<0$), поэтому, фиксируя l и j, выберем в (20) $x>0$ при $\operatorname{Re}\omega_{lj}(x,\lambda)>0$ и $x<0$ при $\operatorname{Re}\omega_{lj}(x,\lambda)<0$. Кроме того, заметим, что из асимптотической формулы (10) следует

$$|\omega_{lj}(x,\lambda)|\geqslant\frac{|\beta_{lj}|}{2}\tau^{\gamma_l} \tag{22}$$

$(|x|\leqslant g(|\lambda|),\ \lambda=\sigma_0+i\tau)$. Тогда, например, при $x>0$ из (20) с учетом (21) и (22) имеем

$$|c_{lj}(\lambda)|\leqslant c_5|\tau|^{c_6}\exp\int_0^x(H_1(\theta)-c_0|\omega_{lj}(\theta,\lambda)|)\,d\theta\leqslant$$
$$c_5|\tau|^{c_6}\exp\int_0^x(H_1(\theta)-\frac{1}{2}c_0|\beta_{lj}||\tau|^{\gamma_l})\,d\theta. \qquad ((23))$$

Полагая в (23) $x=g(\tau)$ и учитывая монотонность $H_1(\theta)$, получаем

$$|c_{lj}(\lambda)|\leqslant c_5\exp\{-c_7|\tau|^{\gamma_l}\} \tag{24}$$

$(l=\overline{1,N},\ j=\overline{1,sq_l})$.

Возьмем любую из функций $Y_{lj}(x,\lambda)$ с асимптотикой (9) и фиксируем x. Тогда при $\lambda=\sigma_0+i\tau$, где τ столь велико, что $|x|\leqslant g(|\tau|)$, из (9) следует

$$\|Y_{lj}(x,\lambda)\|\leqslant c_8\exp\,(c_9|x||\tau|^{\gamma_l}). \tag{25}$$

Подставим оценки (24) — (25) в равенство (18) и при фиксированном x и достаточно большом τ с учетом неравенства

$$(-c_7 g(\tau) + c_9|x|)|\tau|^{\gamma_l} \leqslant -c_{10} g(\tau)|\tau|^{\frac{1}{p_0}}$$

получим

$$|Y(x, \sigma_0 + i\tau)| \leqslant c_{11} \exp\{-c_{10}|\tau|^{\frac{1}{p_0}} g(\tau)\}. \tag{26}$$

Заметим, что из (13) и (16) следует [2]

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\tau^{\frac{1}{p_0}} g(\tau)}{\tau^2}\, d\tau = \infty, \tag{27}$$

а из (26) и (27) заключаем, что

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\ln\|Y(x, \sigma_0 + i\tau)\|}{\tau^2}\, d\tau = -\infty. \tag{28}$$

Итак, при любом фиксированном x $(-\infty < x < \infty)$ для функции $Y(x, \lambda)$, аналитической и ограниченной в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ $(\sigma_0 \geqslant \alpha)$ выполнено (28), что влечет [6] тождество $Y(x, \lambda) \equiv 0$, верное при любых x $(-\infty < x < \infty)$ и λ $(\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0)$. Тогда на основании обращения преобразования Лапласа получаем, что $U(x, t) \equiv 0$ при $(x, t) \in \Pi$. Теорема 2 доказана.

Автор благодарен Н. Г. Косареву за постоянное внимание и руководство.

Библиографический список

1. *Борок В. М.* Приведение линейной системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к системе нормального типа // ДАН СССР. 1957. Т. 115. № 1. С. 13—16.
2. *Житомирский Я. И.* Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 763—782.
3. *Золотарев Г. Н.* Об оценках сверху классов единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Науч. докл. высш. шк. Физ.-мат. науки. 1958. № 2. С. 37—40.
4. *Косарев Н. Г.* О единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с переменными коэффициентами // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1977. Вып. 2. С. 141—158.
5. *Максимовская Н. С.* Классы единственности решения задачи Коши для систем линейных уравнений с растущими коэффициентами // Учен. зап. Иван. пед. ин-та. Т. 123 (1973). С. 25—26.
6. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды: Регуляризация последовательностей. Применения. М., 1955. 286 с.
7. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М., 1948. 396 с.