Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2007 С. 55 – 59

Д. Н. Азаров

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ КОНЕЧНЫХ ИНДЕКСОВ

Получено необходимое и достаточное условие финитной аппроксимируемости двух полициклических групп с объединенными подгруппами конечных индексов.

The necessary and sufficient condition for free product of two polycyclic groups with amalgamated subgroups of finite index to be residually finite group is obtained.

УДК 512.543.

Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Далее через P будем обозначать свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы P является финитная аппроксимируемость групп A и B. Поэтому далее будем предполагать, что A и B финитно аппроксимируемы. Г. Баумслагом [2] доказана финитная аппроксимируемость группы P при дополнительном ограничении, состоящем в том, что подгруппы H и K конечны. Другим естественным ограничением является конечность индексов подгрупп H и K в группах A и B соответственно. Однако это ограничение уже не гарантирует финитную аппроксимируемость группы P. Так, например, группы

$$A = \langle a_1, a_2, x;\ a_1a_2 = a_2a_1,\ x^2 = 1,\ x^{-1}a_1x = a_2\rangle$$

и

$$B = \langle b_1, b_2, y;\ b_1b_2 = b_2b_1,\ y^2 = 1,\ y^{-1}b_1y = b_2\rangle$$

финитно аппроксимируемы, их подгруппы

$$H = (a_1, a_2^2) \quad \text{и} \quad K = (b_1, b_2^3)$$

имеют конечные индексы в группах A и B соответственно, отображение

$$a_1 \mapsto b_1,\ a_2^2 \mapsto b_2^3$$

можно продолжить до изоморфизма $\varphi : H \to K$, но построенная таким образом группа P не является финитно аппроксимируемой. Действительно, в любом конечном гомоморфном образе $\overline{P}$ группы P порядки сопряженных подгрупп $A_2 = (a_2)$ и $B_2 = (b_2)$ совпадают. Поэтому подгруппа C, порожденная элементом

$$c = a_2^2 = b_2^3,$$

имеет один и тот же индекс s в каждой из подгрупп A_2 и B_2 группы $\overline{P}$. Так как элементы a_2^2 и b_2^3 принадлежат C, то s делит каждое из чисел 2 и 3. Поэтому $s = 1$, т. е. в группе $\overline{P}$ имеет место равенство $A_2 = C = B_2$. Следовательно, коммутатор $[a_2, b_2]$ равен 1 в любом конечном гомоморфном образе $\bar{P}$ группы P, но в самой группе P этот коммутатор, как легко видеть, отличен от 1.

Здесь будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть подгруппы H и K имеют конечные индексы в группах A и B соответственно.*

1. Пусть группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству. Если группа P финитно аппроксимируема, то в группах H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов, инвариантные в группах A и B соответственно и такие, что $U\varphi = V$.

2. Пусть A и B — финитно аппроксимируемые группы конечного общего ранга. Если в подгруппах H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов, инвариантные в группах A и B соответственно и такие, что $U\varphi = V$, то группа P финитно аппроксимируема.

Напомним, что группа G называется группой конечного общего ранга, если существует число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе. Очевидно, что все конечно порожденные группы имеют конечный общий ранг. Поскольку полициклические группы конечно порождены, финитно аппроксимируемы и удовлетворяют нетривиальному тождеству, то в качестве следствия из теоремы 1 мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть A и B — полициклические группы. И пусть подгруппы H и K имеют конечные индексы в группах A и B соответственно. Группа P финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в подгруппах H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов, инвариантные в группах A и B соответственно и такие, что $U\varphi = V$.*

Доказательство теоремы 1 основывается на одной фильтрационной теореме Г. Баумслага, для формулировки которой нам потребуются некоторые дополнительные обозначения. Через

$$(A_i)_{i \in \mathcal{I}} \quad \text{и} \quad (B_j)_{j \in \mathcal{J}}$$

будем обозначать семейства всех нормальных подгрупп конечных индексов групп A и B соответственно и рассмотрим множество

$$\Lambda = \big\{(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J} \bigm| (A_i \cap H)\varphi = B_j \cap K\big\}.$$

Если $\lambda = (i,j) \in \Lambda$, то полагаем: $A_\lambda = A_i, B_\lambda = B_j$. В [2] Г. Баумслаг доказал, что для финитной аппроксимируемости группы P достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda K = K. \qquad (1)$$

С другой стороны М. Ширвани [3] установил, что условия (1) будут необходимыми для финитной аппроксимируемости группы P при дополнительном ограничении, состоящем в том, что группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству и $H \neq A$, $K \neq B$. Наличие нетривиального тождества в группах A и B является существенным ограничением, т. е. сформулированный выше результат Ширвани не может быть распространен на случай, когда A и B — произвольные группы и $H \neq A$, $K \neq B$. Соответствующий пример построен в [3]. Здесь мы приводим более простой пример, предложенный Д. И. Молдаванским. Хорошо известно, что группа

$$A = \langle h, t;\ t^{-1}ht = h^2\rangle$$

финитно аппроксимируема. Пусть P — свободное произведение группы A и свободной группы $B = \langle k, l\rangle$ с объединением $h = k$. Группа P является обычным свободным произведением группы A и бесконечной циклической группы $\langle l\rangle$. Поэтому группа P финитно аппроксимируема. Но при этом условие

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H$$

из (1) не выполняется, поскольку объединяемая подгруппа $H = (h)$, как легко видеть, не является финитно отделимой подгруппой группы A.

Приступим теперь к доказательству теоремы 1.

1. Пусть группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству и подгруппы H и K имеют конечные индексы в группах A и B соответственно. Предположим, что группа P финитно аппроксимируема. Покажем, что в подгруппах H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов, инвариантные в A и B соответственно и такие, что $U_\varphi = V$. Это очевидно, если $H = A$ или $K = B$. Например, если $K = B$, то в качестве подгруппы U можно взять пересечение всех подгрупп группы A, сопряженных с H, а в качестве V — образ подгруппы U относительно φ. Поэтому можно считать, что $H \neq A$ и $K \neq B$. Это позволяет применить отмеченный выше результат Ширвани, в силу которого выполняются условия (1).

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$ — системы представителей левых смежных классов групп A и B по подгруппам H и K соответственно. Тогда множества

$$X = \left\{x_i^{-1}x_j \;\middle|\; i,j = 1, \ldots, m;\ i \neq j\right\}$$

и

$$Y = \left\{y_i^{-1}y_j \;\middle|\; i,j = 1, \ldots, n;\ i \neq j\right\}$$

не пересекаются с подгруппами H и K соответственно. Отсюда и из условий (1) следует, что для любых элементов x из X и y из Y найдутся элементы λ_x и λ_y из Λ такие, что

$$x \notin A_{\lambda_x}H, \quad y \notin B_{\lambda_y}K.$$

Подгруппы

$$U = \bigcap_{z \in X \cup Y} A_{\lambda_z} \quad \text{и} \quad V = \bigcap_{z \in X \cup Y} B_{\lambda_z}$$

являются нормальными подгруппами конечных индексов групп A и B соответственно (поскольку этим свойством обладают все A_λ и B_λ). Поэтому для завершения доказательства предложения остается проверить, что $U \leqslant H$, $V \leqslant K$ и $U\varphi = V$.

Пусть x — произвольный элемент из X. Тогда $x \notin A_{\lambda_x}H$ и, следовательно, $x \notin UH$. Поэтому множество X не пересекается с подгруппой UH, т. е. элементы $x_1, \ldots, x_m$ попарно несравнимы слева по модулю UH. Отсюда следует, что $\big[A : UH\big] \geqslant m = \big[A : H\big]$. Это неравенство может выполняться только в случае, когда $UH = H$, т. е. когда $U \leqslant H$. Аналогично проверяется, что $V \leqslant K$. Проверка равенства $U\varphi = V$ сводится к прямому вычислению:

$$U\varphi = (U \cap H)\varphi = \Big(\bigcap_{z \in X \cap Y} (A_{\lambda_z} \cap H)\Big)\varphi = \bigcap_{z \in X \cap Y} (A_{\lambda_z} \cap H)\varphi$$
$$= \bigcap_{z \in X \cap Y} (B_{\lambda_z} \cap K) = V \cap K = V.$$

2. Пусть A и B — финитно аппроксимируемые группы конечного общего ранга. И пусть подгруппы H и K имеют конечные индексы в группах A и B соответственно. Предположим, что в H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов, инвариантные в A и B соответственно и такие, что $U\varphi = V$. Покажем, что группа P финитно аппроксимируема. В силу отмеченного выше результата Г. Баумслага нам достаточно только проверить выполнение условий (1).

Так как индексы $\big[A : H\big]$ и $\big[H : U\big]$ конечны, то U — подгруппа конечного индекса в группе A конечного общего ранга. Отсюда следует, что U — группа конечного общего ранга. В [1] доказано, что в группе конечного общего ранга может существовать только конечное число подгрупп данного конечного индекса. Поэтому для каждого целого положительного числа n в группе U может существовать только конечное число подгрупп индекса n и, следовательно, пересечение U_n всех подгрупп индекса n группы U имеет в U конечный индекс. Если в U нет подгрупп индекса n, то полагаем $U_n = U$. Так как U_n — характеристическая подгруппа конечного индекса группы U, которая, в свою очередь, является нормальной подгруппой конечного индекса группы A, то U_n — нормальная подгруппа конечного индекса группы A.

Так как $U\varphi = V$, то подгруппа $V_n = U_n\varphi$ является характеристической подгруппой конечного индекса группы V. Поэтому V_n — нормальная подгруппа конечного индекса группы B. Так как $U_n \subseteq H$, $V_n \subseteq K$ и $U_n\varphi = V_n$, то $(U_n \cap H)\varphi = V_n \cap K$. Отсюда и из того, что U_n и V_n —

нормальные подгруппы конечных индексов групп A и B, следует, что для подходящего λ_n из Λ

$$U_n = A_{\lambda_n}, \quad V_n = B_{\lambda_n}.$$

Подгруппа U финитно аппроксимируемой группы A обладает тем же свойством. Поэтому пересечение всех ее подгрупп конечного индекса тривиально, т. е.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = 1,$$

и, поскольку $U_n \subseteq H$, получаем:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n H = H.$$

Таким образом,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\lambda_n} = 1, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\lambda_n} H = H. \tag{2}$$

Аналогично проверяется, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\lambda_n} = 1, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\lambda_n} K = K. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что выполняется условие (1).

Автор благодарен Д. И. Молдаванскому за помощь при написании этой работы.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О группах конечного общего ранга // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 100—104.
2. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 21. P. 491—506.
3. *Shirvani M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104. № 3. P. 703—706.