Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2007 С. 60 – 71

А. С. Белов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ВСЕХ ЧАСТНЫХ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Излагаются основные теоремы нового метода доказательства неотрицательности всех частных сумм тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами.

Basic theorems of new method of proof of nonnegativity for all partial sums of trigonometrical series with monotone coefficients are stated.

УДК 517.5.

Введение

В статье [2] нами изложены основные идеи нового метода доказательства неотрицательности всех частных сумм тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами. В своем общем виде метод применим к изучению частных сумм рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos((n+\theta)\,x+\psi)\,,$$

где θ и ψ — произвольные действительные числа, а последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает, начиная с некоторого номера. Но ради простоты и большей прозрачности идеи метода описаны на примере тригонометрических рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)\,. \tag{1}$$

В этой статье мы продолжим излагать метод, ограничиваясь рядами вида (1), и дадим некоторые его приложения к классическим тригонометрическим суммам.

Для удобства далее предполагаем, что последовательность действительных чисел $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$a_n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad a_n \geqslant a_{n+1} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1\,, \quad 2a_0 \geqslant a_1\,, \quad a_0 > 0\,. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05–01–00052).

При всех $t \in [0\,,+\infty)$ определим функцию

$$a(t) = \begin{cases} 2a_0 & \text{при} \quad t \in [0, 1/2)\,, \\ a_n & \text{при} \quad t \in [n-1/2, n+1/2)\,,\ n \geqslant 1\,. \end{cases} \tag{3}$$

В дальнейшем изложении важную роль будут играть функции

$$M(x) = M(a;x) = \int_0^{3\pi/(2x)} a(t)\,\cos(tx)\,dt\,, \qquad x > 0\,, \tag{4}$$

и

$$M_4(x) = M_4(a;x) = \int_0^{7\pi/(2x)} a(t)\,\cos(tx)\,dt\,, \qquad x > 0\,. \tag{5}$$

При всех целых неотрицательных n и действительных x через

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\cos(kx) \tag{6}$$

обозначим частные суммы косинус-ряда (1). Пусть

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}\,,$$

$$V_n(x) = (2a_0 - a_1)\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) + \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k\,\sin\Big(\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\,x\Big) - a_{n+1} \tag{7}$$

при всех целых $n \geqslant 0$ и действительных x. Тогда

$$V_0(x) = (2a_0 - a_1)\,\sin(x/2) - a_1$$

и

$$V_n(x) - V_{n-1}(x) = \Delta a_n\,\Big(1 + \sin\Big(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\,x\Big)\Big) \quad \text{при} \quad n \geqslant 1\,. \tag{8}$$

Эти полиномы связаны с суммами (6) тождеством

$$2\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) S_n(x) = V_n(x) + a_{n+1}\,\Big(1 + \sin\Big(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\,x\Big)\Big)\,, \tag{9}$$

справедливым при всех целых $n \geqslant 0$.

Функции (4) и полиномы (7) также тесно связаны между собой, поскольку (см. [2, лемма 2.2])

$$x\,M(x) = V_n(x) \quad \text{при всех} \quad x \in \Big[\,\frac{3\pi}{2n+3}\,,\frac{3\pi}{2n+1}\,\Big] \tag{10}$$

для всех целых $n \geqslant 0$.

Введенные обозначения используются на протяжении всей этой статьи и считаются определенными, как только задана последовательность $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Важность изучения функции (4) для исследования частных сумм ряда (1) на неотрицательность становится ясной из следующей теоремы (см. [2, теорема 3.1]).

Теорема А. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2) *и точка* $x \in (0, \pi]$ *произвольна. Тогда, если*

$$M(x) > 0\,, \tag{11}$$

то

$$S_n(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad n \geqslant 0 \tag{12}$$

и

$$V_n(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad n \geqslant \frac{3\pi}{2x} - \frac{3}{2}\,. \tag{13}$$

Более того, теорема останется верной, если одновременно в (11), (12) *и* (13) *знак “ $>$” заменить на знак “ $\geqslant$”.*

Таким образом, как только доказано (11), то мы немедленно можем утверждать (12).

Пусть всюду далее квадратные скобки означают целую часть числа, заключенного в них. Суть излагаемого нового метода доказательства неотрицательности частных сумм ряда (1) состоит из следующих действий.

1) Изучается функция (4) в окрестности нуля, т. е. доказывается, что существует точка $x_0 \in (0, \pi]$, для которой

$$M(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad x \in (0, x_0)\,. \tag{14}$$

2) Затем, если такую точку x_0 удалось найти, исследуется функция (4) в окрестности точки π. Это можно сделать, например, с помощью утверждений из статьи [2] (см. там лемму 3.2, теоремы 3.2 и 5.2 и следствия 3.1 и 5.1).

3) Далее функция (4) изучается на остальной части промежутка $(0, \pi]$ на основе равенств (10) и (7).

4) Поскольку (см. [2, лемма 3.1])

$$M_4(x) \geqslant M(x) \qquad \text{при всех} \qquad x > 0\,, \tag{15}$$

то там, где условие (11) не выполнено, изучается функция (5) на неотрицательность.

5) Наконец, в силу теоремы А функция

$$S_{[3\pi/2x]}\,(x) \tag{16}$$

положительна там, где верно условие (11). Поэтому изучаем функцию (16) на неотрицательность только там, где условие (11) не выполнено.

После выполнения всех этих действий применяем следующие теоремы, которые будут доказаны в §1 этой статьи.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и точка* $x \in (0\,,\pi]$ *произвольна. Тогда, если*

$$M_4(x) > 0 \tag{17}$$

и

$$S_{[3\pi/2x]}\,(x) > 0\,, \tag{18}$$

то справедливо утверждение (12) . *При этом теорема останется верной, если одновременно в* (17), (18) *и* (12) *знак "* $>$ *" заменить на знак "* $\geqslant$ *".*

Следующие две теоремы дополняют теорему 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2) , *точка* $x \in (0\,,\pi]$ *произвольна и верно условие* (17) . *Пусть*

$$S_{[3\pi/2x]}\,(x) = 0\,. \tag{19}$$

Тогда

a) если число $3\pi/2x$ *не целое, то при всех целых* $n \geqslant 0$ *и* $n \neq [3\pi/2x]$ *сумма* $S_n(x) > 0$;

b) если число $N = 3\pi/2x$ *целое, то* $S_{N-1}(x) = S_N(x) = 0$ *и при всех целых* $n \geqslant 0$, $n \neq N-1$, $n \neq N$ *сумма* $S_n(x) > 0$.

Следующая теорема также является дополнительной к теореме 1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (2) , *точка* $x \in (0\,,\pi]$ *произвольна и справедливо условие* (17) . *Пусть*

$$M(x) = 0\,. \tag{20}$$

Тогда

a) если число $3\pi/2x - 1/2$ *не целое, то верно утверждение* (12) ;

b) если число $N = 3\pi/2x - 1/2$ *целое, то* $S_N(x) = 0$ *и при всех целых* $n \geqslant 0$, $n \neq N$ *сумма* $S_n(x) > 0$.

Теоремы 1, 2 и 3 анонсированы нами в [1]. Они во многих случаях сводят доказательство неотрицательности частных сумм ряда (1) к исследованию трех функций (4), (5) и (16), связанных неравенством (15), и обосновывают важность изучения методов исследования функции (4) в окрестности нуля, т. е. в получении оценок вида (14).

Отметим, что для проверки условий теоремы 1 иногда удобнее сначала доказать, что справедливо утверждение $M_4(x) - S_{[3\pi/2x]}\,(x) \geqslant 0$, и отсюда и из (18) уже выводить условие (17).

При всех натуральных n будем пользоваться обозначением

$$\nu_n = \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_k - \frac{1}{3}\,(6m + 1 - 2n)\,a_m\,, \qquad \text{где} \;\; m = \Big[\frac{n+1}{3}\Big]\,. \tag{21}$$

Ясно (см. также [2]), что $\nu_1 = a_0/3$ и

$$\nu_{n+1} - \nu_n = \frac{2}{3}\, a_{[(n+1)/3]} - a_n \qquad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,. \tag{22}$$

В § 2 будет получена

Теорема 4. *Пусть последовательность* $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2) *и для некоторого натурального* m *выполнено условие*

$$\nu_n \geqslant 0 \qquad \textit{при всех} \quad n \geqslant 3m-1\,, \tag{23}$$

причем в случае $m \geqslant 2$ *дополнительно выполнено условие*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \geqslant \sum_{j=2m-1-k}^{2m-1+k} a_j \qquad \textit{при всех} \quad k = 0,\, \dots,\, m-2\,, \tag{24}$$

которое будет выполнено, если будут справедливы более простые условия: $a_0 \geqslant a_1$ *и*

$$\Delta a_{2m-2-k} + \Delta a_k - \Delta a_{2m-1+k} \geqslant 0 \qquad \textit{при всех} \quad k = 1, \dots, m-2\,. \tag{25}$$

Тогда

$$M(x) > 0 \qquad \textit{при всех} \quad x \in \left(0\,,\, \frac{\pi}{2m-1}\right). \tag{26}$$

Таким образом, теорема 4 позволяет в некоторых случаях получать утверждения типа (14). Отметим, что если для некоторого натурального m выполнено условие $\nu_{3m-1} \geqslant 0$ и $2a_n \geqslant 3a_{3n-1}$ при всех $n \geqslant m$, то из (22) вытекает, что $\nu_{n+1} \geqslant \nu_n$ при всех $n \geqslant 3m-1$, и поэтому верно (23). Это позволяет в некоторых случаях упростить проверку условия (23). Заметим также, что для выпуклой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ условие (25) выполнено всегда. Например, если взять $a_0 = 1/6$, $a_n = 1/(n+5)$ при всех $n \geqslant 1$, то

$$2a_n - 3a_{3n-1} = \frac{3n-7}{(3n+4)\,(n+5)} > 0$$

при всех $n \geqslant 3$. Из (21) легко вычислить, что $\nu_{11} = 59/72072 > 0$. Так как проверка условия (25) очевидна, поэтому условия теоремы 4 выполнены при $m = 4$, и, значит, $M(x) > 0$ при всех $x \in (0\,,\, \pi/7\,)$.

Как следствие из теоремы 4 будет получена следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть последовательность* $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2), *условиям*

$$a_0 \geqslant a_1\,, \qquad 2a_0 + a_1 \geqslant 4a_2 \tag{27}$$

и условию

$$\nu_n \geqslant 0 \qquad \textit{при всех} \quad n \geqslant 5\,. \tag{28}$$

Тогда при всех $x \in (0\,,\, \pi\,)$ *верны утверждения* (11), (12) *и* (13).

В частности, если невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям*

$$a_0 > 0\,, \quad 2a_0 + a_1 \geqslant 4a_2\,, \quad a_0 + a_1 \geqslant a_2 + a_3 + a_4 \tag{29}$$

и

$$2a_n \geqslant 3a_{3n-1} \qquad \textit{при всех} \quad n \geqslant 2\,, \tag{30}$$

то при всех $x \in (0\,,\,\pi\,)$ *верны утверждения* (11), (12) *и* (13).

Отметим, что теорема 5 в случае, когда $a_0 = a_1$, сильнее теоремы 1.2 из [2].

Теперь перейдем к доказательствам сформулированных выше результатов.

§ 1. Основные теоремы метода доказательства неотрицательности частных сумм тригонометрического ряда

Пусть последовательность действительных чисел $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана. Тогда определены числа (21) и при всех $x \geq 0$ определена функция (3). Будем также рассматривать функции

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt \qquad \text{при} \quad x \geqslant 0\,, \tag{1.1}$$

$$W(y,t) = A(t) + A(2y-t) - A(2y+t) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2y \tag{1.2}$$

и

$$W(y) = W(y,y) = 2\,A(y) - A(3y) \quad \text{при} \quad y \geqslant 0\,. \tag{1.3}$$

Верны (см. [2 , леммы 2.1 и 2.3]) равенства

$$W((2n-1)/6) = \nu_n \qquad \text{при всех} \quad n \geqslant 2 \tag{1.4}$$

и

$$M(x) = x \int_0^{\pi/(2x)} W\Big(\frac{\pi}{2x}\,,t\Big)\,\sin(tx)\,dt \qquad \text{при} \quad x > 0\,. \tag{1.5}$$

Для всех натуральных n определим функции

$$M_n(x) = \int_0^{(2n-1)\pi/(2x)} a(t)\,\cos(tx)\,dt \qquad \text{при всех} \quad x > 0\,. \tag{1.6}$$

Тогда (см. [2 , формула (2.10)])

$$M(x) = M_2(x) = x \int_0^{3\pi/(2x)} A(t)\,\sin(tx)\,dt\,, \qquad x > 0\,,$$

и (см. [2 , лемма 2.2]) для любого натурального q и целого $n \geqslant 0$ справедливо равенство, связывающее функции (1.6) и полиномы (7),

$$x\,M_{2q}(x) = V_n(x) \quad \text{при всех} \quad x \in \Big[\,\frac{(4q-1)\pi}{2n+3}\,,\,\frac{(4q-1)\pi}{2n+1}\,\Big]\,. \tag{1.7}$$

Пусть далее последовательность чисел $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2). Поскольку в силу (8)

$$V_{n+1}(x) \geqslant V_n(x) \quad \text{при всех} \quad x \quad \text{и} \quad n \geqslant 0\,, \tag{1.8}$$

то для любого натурального q и целого $n \geqslant 0$ при всех $x \in (0\,, (4q-1)\pi]$ из (1.7) вытекает неравенство $V_n(x) \geqslant xM_{2q}(x)$, если $(4q-1)\pi/(2n+3) \leqslant x$, т. е.

$$V_n(x) \geqslant xM_{2q}(x) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant (4q-1)\,\frac{\pi}{2x} - \frac{3}{2}\,. \tag{1.9}$$

Из (9) следует, что

$$2\,\sin(\,x/2\,)\,S_n(x) \geqslant V_n(x) \quad \text{при всех} \quad x \quad \text{и} \quad n \geqslant 0\,. \tag{1.10}$$

Более того, для каждого натурального q при всех $x > 0$ верна (см. [2 , лемма 3.1]) оценка

$$\int_0^{\alpha} a(t)\,\cos(tx)\,dt \geqslant M_{2q}(x) \quad \text{при всех} \quad \alpha \geqslant (4q-3)\pi/(2x)\,. \tag{1.11}$$

Поскольку (см. [2 , формула (2.12)])

$$2\,\sin(\,x/2\,)\,S_n(x) = x\int_0^{n+1/2} a(t)\,\cos(tx)\,dt \qquad \text{при всех} \quad n \geqslant 0\,,$$

то из (1.11) для всех $x > 0$ и целых $n \geqslant 0$ вытекает оценка

$$2\,\sin(\,x/2\,)\,S_n(x) \geqslant xM_{2q}(x)\,, \quad \text{если} \quad n + 1/2 \geqslant (4q-3)\pi/(2x)\,. \tag{1.12}$$

Характер изменения частных сумм ряда (1) с возрастанием номера дает следующая

Лемма 1.1. *Если $x \in (0\,, \pi]$ и $\gamma = \pi/(2x)$, то при каждом натуральном k верна оценка*

$$S_n(x) \geqslant S_{[(4k-1)\gamma\,]}\,(x) \;\; \textit{при} \;\; n = [(4k-3)\gamma\,]\,, \,\ldots\,, [(4k+1)\gamma\,] \tag{1.13}$$

и условие (12) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$S_{[(4k-1)\pi/2x]}\,(x) > 0 \qquad \textit{при всех} \quad k \geqslant 1\,. \tag{1.14}$$

При этом лемма останется верной, если в (1.14) *и* (12) *одновременно знак “ $>$” заменить на знак “ $\geqslant$”.*

Доказательство. Пусть $x \in (0\,, \pi]$ и $\gamma = \pi/(2x)$. Тогда при $n = 0, \ldots, [\gamma]$ имеем $S_n(x) \geqslant a_0 > 0$. Если k — натуральное число, то $S_{n-1}(x) \geqslant S_n(x)$ при $n = [(4k-3)\gamma\,]+1\,, \,\ldots\,, [(4k-1)\gamma\,]$ и $S_n(x) \geqslant S_{n-1}(x)$ при $n = [(4k-1)\gamma\,]+1\,, \,\ldots\,, [(4k+1)\gamma\,]$. Поэтому верна оценка (1.13). Из (1.13) и (1.14) немедленно получаем (12). Обратно, из (12), очевидно, следует (1.14). Поскольку случай знака “ $\geqslant$” совершенно аналогичен, то лемма 1.1 доказана.

Из оценки (1.12) и леммы 1.1 следует

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (2), q — *натуральное число и* $x \in (0, \pi]$. *Тогда*

$$S_n(x) \geqslant xM_{2q}(x)/(2\sin(x/2)) \quad \textit{при} \quad n \geqslant [(4q-3)\pi/(2x)] \tag{1.15}$$

и

$$\inf_{n \geqslant [\pi/(2x)]} S_n(x) \geqslant \min\left\{ \frac{xM_{2q}(x)}{2\sin(x/2)}, S_{[(4k-1)\pi/2x]}(x) : k = 1, ..., q-1 \right\}. \tag{1.16}$$

В частности, если выполнено условие

$$M_{2q}(x) > 0 \tag{1.17}$$

и

$$S_{[(4k-1)\pi/2x]}(x) > 0 \qquad \textit{при всех} \quad k = 1, \ldots, q-1, \tag{1.18}$$

то справедливо утверждение (12). *При этом теорема останется верной, если одновременно в* (1.17), (1.18) *и* (12) *знак* “ $>$ ” *заменить на знак* “ $\geqslant$ ”.

Доказательство. Пусть $\gamma = \pi/(2x)$. В силу (1.12)

$$S_n(x) \geqslant xM_{2q}(x)/(2\sin(x/2))$$

при $n \geqslant [(4q-1)\gamma]$. Отсюда и из (1.13) при $k = q$ получаем (1.15). По лемме 1.1

$$\min_{n=[\gamma], \ldots, [(4q-3)\gamma]} S_n(x) = \min_{k=1, \ldots, q-1} S_{[(4k-1)\gamma]}(x).$$

Отсюда следует (1.16). Из (1.16), (1.17) и (1.18) сразу вытекает (12). Теорема 1.1 доказана.

Частный случай теоремы 1.1 при $q = 2$ особенно интересен. Это теорема 1, которую теперь можно считать доказанной.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\gamma = \pi/(2x)$. Из теоремы 1.1 и (1.15) при $q = 2$ видим, что утверждения a) и b) верны при $n \geqslant [5\gamma]$. В силу условий теоремы 2 имеем $a_{[3\gamma]+1} > 0$, т. к. иначе в (17) будет равенство. Повторяя доказательство леммы 1.1, получаем в случае a) оценки $S_{[\gamma]}(x) > \cdots > S_{[3\gamma]}(x)$ и $S_{[3\gamma]}(x) < S_{[3\gamma]+1}(x) \leqslant \cdots \leqslant S_{[5\gamma]}(x)$, а в случае b) оценки $S_{[\gamma]}(x) > \cdots > S_{[3\gamma]-1}(x) = S_{[3\gamma]}(x)$ и опять $S_{[3\gamma]}(x) < S_{[3\gamma]+1}(x) \leqslant \cdots \leqslant S_{[5\gamma]}(x)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\gamma = \pi/(2x)$. При некотором натуральном n величина $3\gamma \in [n+1/2, n+3/2)$. В силу условий теоремы 3 коэффициент $a_{n+1} > 0$. Поэтому из (9) и (10) в случае a) вытекает (18) и по теореме 1 получаем (12). Если же имеет место случай b), то $n = N$ и $a_{N+1} > 0$. В силу (20), (9) и (10) получаем $S_N(x) = 0$, т. е. верно (19). Поэтому выполнены условия теоремы 2. Из утверждения a) теоремы 2 немедленно получаем утверждение b) теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Отметим, что из (1.8) и (10) при $x \in (0\,, 3\pi]$ и $n \geqslant 0$ следует, что $V_n(x) \leqslant x\,M(x)$ при $x \leqslant 3\pi/(2n+1)$ и $x\,M(x) \leqslant V_n(x)$ при $x \geqslant 3\pi/(2n+3)$. Поэтому

$$x\,M(x) \geqslant V_n(x) \quad \text{при всех} \quad x \in \left(0\,, \frac{3\pi}{2n+1}\right] \tag{1.19}$$

и

$$V_n(x) \geqslant x\,M(x) \quad \text{при всех} \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2n+1}\,, 3\pi\right] \tag{1.20}$$

для каждого неотрицательного n. Неравенства (1.20) и (1.9) позволяют иногда оценить снизу полином $V_n(x)$, а неравенство (1.19) дает оценку снизу для функции (4), как и неравенство (1.10) для сумм (6).

§ 2. Доказательство теорем 4 и 5

Изучим функции (1.2) и (1.3) более подробно.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (2) *и положительное число* y *таково, что число* $4y$ *не является целым. Тогда существует такое* $t \in (0, y)$, *что* $W(y\,, t) \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $W(y\,, t) = 0$ при всех $t \in (0, y)$. Тогда

$$A(t) + A(2y - t) - A(2y + t) = 0 \qquad \text{при всех} \quad t \in [0, y]\,. \tag{2.1}$$

Поскольку число $4y$ не является целым, то при $t \in (0, y)$ из трех чисел t, $2y - t$, $2y + t$, самое большее, только одно может быть вида $n - 1/2$, где n — натуральное число. Отсюда, из (3), (1.1) и (2.1) сразу вытекает, что ломаная функция $A(v)$ линейна в некоторой окрестности любой точки $v \in (0, y) \cup (y, 2y) \cup (2y, 3y)$. Поскольку она также линейна в некоторой окрестности точек y и $2y$, то $A(v) = a(0)\,v$ при $v \in (0, 3y)$. Но тогда из (2.1) получаем, что $a(0) = 0$, а это противоречит условиям (2). Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* (2) *и существуют такие числа* $0 \leqslant b \leqslant B \leqslant \infty$, *что*

$$W(b\,, t) \geqslant 0 \qquad \textit{при всех} \quad t \in (0, b) \tag{2.2}$$

и

$$W(y) \geqslant 0 \qquad \textit{при всех} \quad y \in (b, B)\,. \tag{2.3}$$

Тогда

$$W(y\,, t) \geqslant 0 \quad \textit{при всех} \quad y \in [b, B) \quad \textit{и} \quad 0 \leqslant t \leqslant y \tag{2.4}$$

и

$$M(x) > 0 \qquad \textit{при всех} \quad x \in (\pi/(2B)\,, \pi/(2b)\,)\,. \tag{2.5}$$

Доказательство. При $y \in [b, B)$ и $0 \leqslant t \leqslant y$ имеем оценку $y \geqslant \max\{t, b\}$. Поэтому (см. [2, лемма 4.1]) $W(y\,, t) \geqslant W(\max\{t, b\}\,, t)$, а последняя величина неотрицательна в силу (2.2), (1.3) и (2.3). Поэтому верно утверждение (2.4). Предположим, что при некотором $y_0 \in (b, B)$

будет $W(y_0\,,t) = 0$ при всех $t \in (0, y_0)$. Тогда (см. [2, лемма 4.1]) $W(y\,,t) = 0$ при всех $t \in [0, y]$ и $y \in [b, y_0]$, а это противоречит лемме 2.1. Значит, для каждого $y \in (b, B)$ найдется такая точка $t \in (0, y)$, что $W(y\,,t) > 0$. Отсюда (см. [2, лемма 4.3]) немедленно вытекает (2.5). Лемма 2.2 доказана.

Далее лемма 2.2 применяется при $B = +\infty$. В этом случае, конечно, в (2.5) число $\pi/(2B) = 0$.

Лемма 2.3. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (2), *условию* $a_0 \geqslant a_1$ *и* $W(b) \geqslant 0$ *в некоторой точке* $b \geqslant 0$. *Тогда справедливы следующие два утверждения:*

1) *если число* $N = b - 1/2$ *целое и, в случае* $N > 1$, *дополнительно выполнено условие*

$$\Delta a_{2N-k} + \Delta a_k - \Delta a_{2N+1+k} \geqslant 0 \qquad \text{\it при всех} \quad k = 1, \ldots, N-1,$$

то верно условие (2.2);

2) *если число* $N = b$ *целое и, в случае* $N > 2$, *дополнительно выполнено условие*

$$\Delta a_{2N-1-k} + \Delta a_k - \Delta a_{2N+k} \geqslant 0 \qquad \text{\it при всех} \quad k = 1, \ldots, N-2,$$

то верно условие (2.2).

Доказательство. Конечная последовательность чисел $\{d_n\}_{n=1}^{N}$ называется выпуклой вверх, если либо $N = 1, 2$, либо $N > 2$ и $\Delta^2 d_n = d_n - 2d_{n+1} + d_{n+2} \leqslant 0$ при всех $n = 1, \ldots, N-2$. Сначала напомним следующее простое свойство выпуклой последовательности: если последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{N}$ выпукла вверх и $d_1 \geqslant 0$, $d_N \geqslant 0$, то $d_k \geqslant 0$ при всех $k = 1, \ldots, N$. Действительно, если $N = 1, 2$, то утверждение очевидно. Если же $N > 2$, то $\Delta d_n = d_n - d_{n+1} \leqslant d_{n+1} - d_{n+2} = \Delta d_{n+1}$ при $n = 1, \ldots, N-2$. Значит, последовательность $\{\Delta d_n\}_{n=1}^{N-1}$ не убывает. В случае, когда или $\Delta d_1 \geqslant 0$, или $\Delta d_{N-1} \leqslant 0$, последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{N}$ монотонна и утверждение верно. Если же $\Delta d_1 < 0$ и $\Delta d_{N-1} > 0$, то последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{N}$ сначала не убывает до некоторого места, а затем не возрастает. Следовательно, она неотрицательна.

Используя это свойство выпуклой последовательности, докажем сначала первое утверждение. Ясно, что $N \geqslant 0$. Из (1.2) имеем $W(N + 1/2\,,t) = A(t) + A(2N+1-t) - A(2N+1+t)$ при $t \in [0, N+1/2]$. Поэтому функция $W(b\,,t)$ линейна между точками $\{0\} \cup \{k + 1/2\}_{k=0}^{N}$ и $W(b\,,0) = 0$,

$$W\Big(\,b\,,k+\frac{1}{2}\,\Big) = \sum_{j=0}^{k} a_j - \sum_{j=2N+1-k}^{2N+1+k} a_j \qquad \text{при всех} \quad k = 0, \ldots, N\,.$$

В частности, $W(\,b\,,1/2\,) = a_0 - a_{2N+1} \geqslant 0$. Поскольку $W(\,b\,,k+1/2\,) - W(\,b\,,k-1/2\,) = a_k - a_{2N+1-k} - a_{2N+1+k}$ при всех $k = 1, \ldots, N$, то $-W(\,b\,,k+3/2\,) + 2W(\,b\,,k+1/2\,) - W(\,b\,,k-1/2\,) = \Delta a_k + \Delta a_{2N-k} - \Delta a_{2N+k+1} \geqslant 0$ при $k = 1, \ldots, N-1$. Поэтому последовательность $\{\,W(\,b\,,k+1/2\,)\,\}_{k=0}^{N}$ выпукла вверх и, значит, она неотрицательна.

Теперь докажем утверждение 2). В этом случае число N натуральное и из (1.2) имеем $W(N,t) = A(t)+A(2N-t)-A(2N+t)$ при $t \in [0,N]$. Значит, функция $W(b,t)$ линейна между точками $\{0\} \cup \{k+1/2\}_{k=0}^{N-1} \cup \{N\}$ и $W(b,0)=0$,

$$W\Big(b,k+\frac{1}{2}\Big) = \sum_{j=0}^{k} a_j - \sum_{j=2N-k}^{2N+k} a_j \qquad \text{при всех} \quad k=0,\ldots,N-1,$$

$W(b,N) = W(b,N-1/2) - a_{3N}/2$. Значит, $W(b,N-1/2) = W(b) + a_{3N}/2 \geqslant 0$, $W(b,1/2) = a_0 - a_{2N} \geqslant 0$ и $W(b,k+1/2) - W(b,k-1/2) = a_k - a_{2N-k} - a_{2N+k}$ при всех $k=1,\ldots,N-1$. Поэтому $-W(b,k+3/2) + 2W(b,k+1/2) - W(b,k-1/2) = \Delta a_k + \Delta a_{2N-k-1} - \Delta a_{2N+k} \geqslant 0$ при $k=1,\ldots,N-2$, т. е. последовательность $\{W(b,k+1/2)\}_{k=0}^{N-1}$ выпукла вверх и, значит, неотрицательна. Лемма 2.3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Положим, что $b=m-1/2$ и $B=+\infty$. Из условий (23) и (1.4) следует, что $W((2n-1)/6) \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 3m-1$. Поскольку (см. [2, лемма 2.1]) функция $W(y)$ линейна на отрезках $[(2n-1)/6,(2n+1)/6]$, $n \geqslant 1$, то $W(y) \geqslant 0$ при всех $y \geqslant m-1/2 = b$. Так как функция $W(b,t) = A(t) + A(2m-1-t) - A(2m-1+t)$ кусочно линейна на отрезке $[0,b]$ с узлами в точках $\{0\} \cup \{k+1/2\}_{k=0}^{m-1}$ и в силу (24) и (23)

$$W\Big(b,k+\frac{1}{2}\Big) = \sum_{j=0}^{k} a_j - \sum_{j=2m-1-k}^{2m-1+k} a_j \geqslant 0$$

при всех $k=0,\ldots,m-1$, то выполнены все условия леммы 2.2. Поэтому справедливо (26). Поскольку лемма 2.3 утверждает, что из условия (25) вытекает (24), то теорема 4 доказана.

Отметим, что лемма 2.2, а значит, и теорема 4 используют тесную связь (1.5) между функциями (1.2) и (4).

Лемма 2.4. *Если выполнены условия* (2), *то полином* $V_1(x) > 0$ *при всех* $x \in (\pi/3,\pi)$ *тогда и только тогда, когда*

$$a_0 \geqslant a_1 \qquad \textit{и} \qquad 2a_0 + a_1 \geqslant 4a_2. \tag{2.6}$$

В частности, если условия (2.6) *выполнены, то верна оценка*

$$M(x) > 0 \qquad \textit{при всех} \quad x \in (\pi/3,\pi). \tag{2.7}$$

Доказательство. Из (7) имеем $2V_1(\pi/3) = 2a_0 + a_1 - 4a_2$. Поэтому при $\varphi = \pi/3$ условие 3) леммы 3.2 из [2] совпадает с (2.6). Значит (см. [2, лемма 3.2]), $V_1(x) > 0$ при всех $x \in (\pi/3,\pi)$. Из оценки (1.19) при $n=1$ сразу вытекает (2.7). Лемма 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Из условий теоремы 5 следует выполнение условий теоремы 4 при $m=2$. Поэтому верно утверждение (26) при $m=2$. Из условий (27) по лемме 2.4 вытекает оценка (2.7). Наконец, из (21), (28), (10) и (9) при $n=4$ выводим

$$\frac{\pi}{3} M\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = V_4\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = S_4\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 - a_3 - \frac{1}{2}a_4 =$$
$$= \frac{1}{2}(a_0 - a_3) + \frac{1}{2}\nu_5 \geqslant 0,$$

причем равенство нулю возможно только при $a_0 = a_3$, что в силу условий (27) и (2) невозможно. Поэтому верно утверждение (11) при всех $x \in (0, \pi)$. Из теоремы A немедленно получаем первую часть теоремы 5. Из (29) следует, что $\nu_5 = a_0 + a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \geqslant 0$, а из (30) вытекает в силу (22), что $\nu_{n+1} - \nu_n \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 5$. Поэтому из (29) и (30) вытекают условия (27) и (26). Теорема 5 доказана.

Библиографический список

1. *Белов А. С.* Новый метод исследования частных сумм тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами на неотрицательность // Тез. докл. Калужской Международной конференции по теории приближения функций, посвященной памяти профессора П. П. Коровкина (26—29 июня 1996 г.). Калуга, 1996. Т. 1. С. 29—30.
2. *Белов А. С.* О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 4. С. 21—46.