Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2007 С. 72 – 80

С. В. Колесников

О МНОЖЕСТВАХ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Приводятся дескриптивно-метрические условия на множество $E \subset [0, 2\pi)$, достаточные для того, чтобы E было множеством всех точек расходимости ряда Фурье ограниченной функции.

Метрическое условие формулируется в терминах α-емкости.

This article includes descriptional-metrical conditions on a set $E \subset [0, 2\pi)$ sufficient to be the set of all points of divergence for Fourier series of a bounded function.

The metrical condition is formulated in terms of α-capacity.

УДК 517.5.

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция и $T(f)$ — множество всех точек расходимости ее ряда Фурье.

Известно, что $T(f)$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$.

Известно также, что если функция $f(x)$ ограничена, то множество $T(f)$ имеет нулевую линейную меру Лебега.

Ниже приводится условие на E, формулируемое в терминах α-емкости, достаточное для того, чтобы E было множеством $T(f)$ для ограниченной функции f.

Напомним [1], что K-емкостью борелевского множества E ($K(t)$, $t > 0$, — убывающая функция, $\lim_{t\to 0} K(t) = \infty$) называется величина $\mathrm{Cap}E = \sup \mu(E)$, где супремум берется по всем положительным борелевским мерам, сосредоточенным на E, для которых потенциал

$$U_K^\mu(z) = \int_E K(|\zeta - z|)d\mu(\zeta)$$

ограничен и не превосходит 1 на всей комплексной плоскости.

Емкость множества E относительно ядра $K(t) = \frac{1}{|t|^\alpha}$, $\alpha > 0$, называется α-емкостью и обозначается как $\mathrm{Cap}_\alpha E$.

Модифицируя метод из [2], можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого множества $E \subset [0, 2\pi)$ типа G_δ, удовлетворяющего условию $\lim_{\alpha\to 1}(1-\alpha)^{-1} Cap_\alpha(E) = 0$, существует ограниченная, 2π-периодическая функция $f(x)$, ряд Фурье которой расходится на E и сходится на $[0, 2\pi) \setminus E$.*

Для доказательства теоремы будут необходимы следующие леммы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05–01–00962).

Лемма 1. *Пусть* $1/2 < \alpha < 1$, $a_k^\alpha = 1/n^{1-\alpha}$, $k = 1, 2, \dots$, $a_0^\alpha = 2a_1^\alpha - a_2^\alpha$,

$$K_\alpha(t) = \frac{a_0^\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha \cos kt. \tag{1}$$

Существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, *не зависящие от* α, *такие, что*

$$C_1 \frac{1-\alpha}{|t|^\alpha} < K(t) < C_2 \frac{1-\alpha}{|t|^\alpha}, \ \ |x| \leqslant \pi.$$

Доказательство. Применяя дважды преобразование Абеля к ряду (1), получим

$$K_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 a_k^\alpha \Phi_k(t), \ \ \Phi_k(t) = \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}; \ \ \Delta^2 a_k^\alpha = a_k^\alpha - 2a_{k+1}^\alpha + a_{k+2}^\alpha.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(k+1)^{3-\alpha}} < \Delta^2 a_k < \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{k^{3-\alpha}}, \ \ k = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Пусть $|t| \leqslant 1/2$ и N натуральное число, такое, что $1/(N+1) < |t| \leqslant 1/N$.

Так как $\Phi_k(t) < (k+1)^2$ и $\Delta a_0^\alpha = 0$, то

$$K_\alpha(t) < 2(1-\alpha) \sum_{k=1}^{N} \frac{(k+1)^2}{k^{3-\alpha}} + 2(1-\alpha) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2k^{3-\alpha} \sin^2 \frac{t}{2}} <$$

$$< 8(1-\alpha) \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{1-\alpha}} + \frac{12(1-\alpha)}{t^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3-\alpha}} <$$

$$< 16(1-\alpha)(N+1)^\alpha + \frac{12(1-\alpha)}{t^2 (N+1)^{2-\alpha}} < 28(1-\alpha)(N+1)^\alpha < 56 \frac{1-\alpha}{t^\alpha}.$$

С другой стороны, при $|(k+1)x| < \pi$ имеем $\Phi_k(x) \geqslant (2/\pi^2)(k+1)$. Поэтому

$$K_\alpha(t) > \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(k+1)^{3-\alpha}} (k+1)^2 > \frac{(1-\alpha)(N+1)^\alpha}{\pi^2} > \frac{(1-\alpha)}{\pi^2} \frac{1}{t^\alpha}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* μ *— некоторая положительная мера, сосредоточенная на* $[0, 2\pi]$, $1/2 < \alpha < 1$,

$$U(x) = \int_0^{2\pi} K_\alpha(t-x) d\mu(t)$$

— потенциал меры μ относительно ядра K_α из леммы 1. Тогда ряд Фурье функции $U(x)$ сходится в точках, в которых она конечна, и ее частные суммы $S_n(x,U)$ удовлетворяют неравенству

$$|S_n(x)| \le \frac{U(x)}{1-\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Сначала оценим частные суммы $S_n(t, K_\alpha)$ ряда Фурье ядра $K_\alpha(t)$.

Применяя дважды преобразование Абеля для $S_n(t, K_\alpha)$, получим

$$S_n(t, K_\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha \cos kt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-2} \Delta^2 a_k^\alpha \Phi_k(t) + n\Delta a_{n-1}^\alpha \Phi_{n-1}(t) + a_n^\alpha D_n(t), \tag{3}$$

где $\Delta a_k^\alpha = a_k^\alpha - a_{k+1}^\alpha$, $\Delta^2 a_k^\alpha = \Delta a_k^\alpha - \Delta a_{k+1}^\alpha$, $D_k(t)$ — ядро Дирихле, а $\Phi_k(t) = \sum_{j=0}^{k} D_j(t)$.

Из (3) следует, что $K_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^2 a_k^\alpha \Phi_k(t)$ и, значит,

$$|S_n(t, K_\alpha)| \leqslant K_\alpha(t) + n\Delta a_{n-1}^\alpha \Phi_{n-1}(t) + a_n^\alpha D_n(t). \tag{4}$$

Отдельно рассматривая случаи $|t| < 1/n$ и $|t| \geqslant 1/n$, легко показать, что

$$|a_n D_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{t^\alpha}, \quad |n\Delta a_{n-1}^\alpha \Phi_{n-1}(t)| \leqslant \frac{\pi^2}{2} \frac{1-\alpha}{t^\alpha}. \tag{5}$$

Таким образом, из (4), (5) и леммы 2 следует, что

$$|S_n(t, K_\alpha)| \leqslant \frac{C}{1-\alpha} K_\alpha(t), \tag{6}$$

где C — постоянная, не зависящая от α.

Частная сумма $S_n(t, U)$ ряда Фурье функции $U(x)$ равна

$$S_n(x, U) = \int S_n(t-x, K_\alpha) d\mu(t). \tag{7}$$

Поэтому если в точке x потенциал $U(x)$ конечен, то из (6) и (7) следует, что

$$|S_n(x, U)| \leqslant \frac{C}{1-\alpha} U(x).$$

Кроме того, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $S_n(x, U)$ имеет предел при $n \to \infty$, равный $U(x)$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть множество $E \subset [0, 2\pi)$ удовлетворяет условию $\lim_{\alpha\to 1-0}(1-\alpha)^{-1} Cap_\alpha(E) = 0$, $G \supset E$ — открытое множество. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует ограниченная 2π-периодическая функция $f(x)$ такая, что ряд Фурье $f(x)$ всюду сходится, $0 < f(x) < 3+\epsilon$, $f(x) > 1$ на E, все частные суммы $S_n(x, f)$ удовлетворяют неравенству $|S_n(x, f)| < \epsilon$ при $x \notin G$ и $f(x)$ непрерывна на некотором открытом множестве, содержащем E.*

Доказательство. Заметим сначала, что из леммы 2 и определения емкости следует, что для любого множества F

$$\mathrm{Cap}_{K_\alpha}(F) < \frac{\mathrm{Cap}_\alpha(F)}{C_1(1-\alpha)},$$

поэтому из условия леммы следует, что $\lim_{\alpha\to 1} \mathrm{Cap}_{K_\alpha}(E) = 0$.

Разобьем на части каждый из составляющих интервалов множества G двумя последовательностями точек, сходящимися к их концам. При этом, очевидно, в силу условия на E, точки этих последовательностей можно выбрать из дополнения множества E. Все полученные интервалы расположим в последовательность (c_n, d_n), $n = 1, 2, \dots$.

Положим $E_n = E \cap (c_n, d_n)$, $n = 1, 2, \dots$.

Очевидно, $E = \cup_{n=1}^\infty E_n$ и множества E_n удовлетворяют тому же условию, что и E: $\lim\limits_{\alpha\to 1} \mathrm{Cap}_{K_\alpha}(E_n) = 0$. Из последнего следует, что для любого n найдется такое $1/2 < \alpha_n < 1$, что

$$\mathrm{Cap}_{K_{\alpha_n}}(E_n) < \frac{\epsilon\rho_n}{C_2 2^n},$$

где ρ_n — расстояние от (c_n, d_n) до ближайшего интервала (c_k, d_k), $k = 1, 2, \dots$, не смежного с ним. Выберем открытое множество G_n, $E_n \subset G_n \subset (c_n, d_n)$, такое, что $\mathrm{Cap}_{K_{\alpha_n}}(G_n) < \epsilon\rho_n / C_2 2^n$, и обозначим через μ_n и $f_n(x)$ соответственно равновесную меру и равновесный потенциал G_n относительно ядра K_{α_n}. Тогда $0 < f_n(x) < 1$, $f_n(x)$ непрерывна вне (c_n, d_n) и $f_n(x) = 1$ на G_n.

Всюду, кроме интервала (c_n, d_n) и двух интервалов смежных с ним, имеет место неравенство

$$f_n(x) = \int K_{\alpha_n}(t-x)d\mu_n(t) \leqslant C_2 \int \frac{1-\alpha_n}{\rho_n^{\alpha_n}} d\mu_n(G_n) \leqslant \frac{1-\alpha_n}{\rho_n}\frac{\epsilon\rho_n}{2^n} \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha_n)\frac{\epsilon}{2^n}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$$

сходится при всех x и при всех x выполняется неравенство $0 < f(x) < 3+\epsilon$. Кроме того, f непрерывна на множестве $O = \cup_{n=1}^\infty G_n$ и $f(x) > 1$, $x \in O$.

По лемме 2 из (8) следует, что на всех интервалах (c_k, d_k) не смежных с (c_n, d_n) выполняется

$$|S_k(x, f_n)| \leqslant \frac{\epsilon}{2^n}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{9}$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_k(x, f_n)$ сходится абсолютно при всех x к $S_k(x, f)$ и при $x \notin G$

$$|S_k(x, f)| \leqslant \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots .$$

По лемме 2 ряд Фурье каждой из функций $f_n(x)$ всюду сходится, поэтому сходится и ряд Фурье функции f.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Пусть множество $E \subset [0, 2\pi)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и $E = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n, $n = 1, 2, \dots$, — открытые множества, $\tilde{G}_n = \{e^{it} : t \in G_n\}$.

Построим последовательность функций $f_n(x)$, имеющих сходящиеся всюду ряды Фурье, и последовательность открытых множеств O_n, $E \subset O_n \subset G_n$, $O_{n+1} \subset O_n$, $n = 1, 2, \dots$, так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

а) $|f_n(x)| \leqslant 3$;

б) $|S_k(x, f_n - f_{n-1})| \leqslant 1/2^n$, $x \in [0, 2\pi) \setminus O_n$, $k = 1, 2, \dots$;

в) $f_n(x) > 1$, $x \in O_n$, если n нечетно, и $f_n(x) < 0$, $x \in O_n$, если n четно.

Применив лемму 4 для $G = G_1$ и $\epsilon = 1/2$, найдем функцию $f_1(x)$, непрерывную на некотором открытом множестве, содержащем E, такую, что $0 < f_1(x) < 3$, $f_1(x) > 1$ на E и $|S_n(x, f_1)| < 1/2$ при $x \notin G_1$. Поэтому найдется такое открытое множество $O_1 \subset G_1$, содержащее E, на котором имеет место неравенство $f_1(x) > 1$.

Далее функции f_n с четными номерами n строим с помощью процедуры, указанной ниже в п. А), а функции с нечетными номерами строим с помощью процедуры Б).

А) Если функция f_{n-1} уже построена и n четно, то существует открытое множество $O_{n-1} \subset G_{n-1}$, на котором f_{n-1} непрерывна и удовлетворяет неравенству $f_{n-1}(x) > 1$. Применим лемму 2, взяв $G = O_{n,0} = O_{n-1}$, $E \subset O_{n,0}$ и $\epsilon = 2^{-(n+1)}$. Получим функцию $f_{n,1}(x)$ со сходящимся рядом Фурье, непрерывную на некотором открытом множестве $O_{n,1} \subset O_{n,0}$, содержащем E, и удовлетворяющую на нем неравенству $f_{n,1}(x) > 1$, частные суммы которой удовлетворяют неравенству $|S_n(x, f_{n,1})| < 2^{-(n+1)}$ вне множества $O_{n,0}$.

Рассмотрим функцию $g_{n,1}(x) = f_{n-1}(x) - f_{n,1}(x)$.

Если не во всех точках множества E выполняется неравенство $g_{n,1}(x) \leqslant 0$, то снова возьмем открытое множество $O_{n,2} \subset O_{n,1}$, на котором $g_{n,1}(x) > 0$, содержащее все точки множества E, в которых выполняется последнее неравенство, и найдем функцию $f_{n,2}$, удовлетворяющую лемме 2 с $G = O_{n,2}$ и $\epsilon = 2^{-(n+2)}$, т. е. неравенству $f_{n,2}(x) > 1$ на некотором открытом множестве, содержащем E, и неравенству $|S_n(x, f_{n,2})| < 2^{-(n+2)}$ вне $O_{n,2}$.

Затем снова рассмотрим функцию $g_{n,2}(x) = f_{n-1}(x) - f_{n,1}(x) - f_{n,2}(x)$. И так далее. Поскольку $f_{n-1}(x)$ ограничена, то процесс окончится тем, что некоторая фунция g_{n,k_n} будет удовлетворять неравенству $g_{n,k_n}(x) \leqslant 0$ на всем множестве E.

В качестве функции $f_n(x)$ возьмем $g_{n,k_n}(x)$, а в качестве множества O_n выберем какое-нибудь открытое множество $E \subset O_n \subset G_n$, на котором $f_n(x)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству $f_n(x) \leqslant 0$.

Б) В случае, когда n нечетно, функция f_{n-1} непрерывна на некотором открытом множестве $O_{n-1} \subset G_{n-1}$ и удовлетворяет на нем неравенству $f_{n-1}(x) < 0$.

Применим лемму 2, взяв $G = O_{n,0} = O_{n-1}$ и $\epsilon = 2^{-(n+1)}$. Получим функцию $f_{n,1}(x)$, непрерывную на некотором открытом множестве, содержащем E, удовлетворяющую на нем неравенству $f_{n,1}(x) > 1$.

Рассмотрим функцию $g_{n,1}(x) = f_{n-1}(x) + f_{n,1}(x)$. Если на множестве E остались точки, в которых $g_{n,1}(x) < 1$, то снова возьмем открытое множество $O_{n,1}$, содержащее все такие точки множества E, и найдем функцию $f_{n,2}$, удовлетворяющую лемме 2 с $G = O_{n,1}$ и $\epsilon = 2^{-(n+2)}$. Снова рассмотрим функцию $g_{n,2}(x) = f_{n-1}(x) + f_{n,1}(x) + f_{n,2}(x)$. И так далее. Через конечное число шагов на всем множестве E станет $g_{n,k_n}(x) > 1$.

Положим $f_n(x) = g_{n,k_n}(x)$, а в качестве множества O_n возьмем открытое множество $O_n \supset E$, на котором $f_n(x)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству $f_{n,k}(x) \geqslant 1$.

Покажем, что выполняются свойства а) — в).

Свойство в) выполняется по построению функций f_n.

Так как

$$f_n(x) - f_{n-1}(x) = \pm \sum_{k=1}^{k_n} f_{n,k}(x)$$

и при $x \notin O_{n-1}$ выполняется неравенство $|S_j(x, f_{n,k})| \leqslant 2^{-(n+k)}$, $j = 1, 2, \dots$, то

$$|S_j(x, f_n - f_{n-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} |S(x, f_{n,k})| \leqslant 2^{-n}, \tag{10}$$

и, следовательно, б) выполняется.

Покажем, что последовательность f_n равномерно ограничена при $x \notin E$.

Для этого покажем сначала, что на множестве O_{n-1} выполняется неравенство

$$-\frac{7}{2} - \frac{1}{2^n} < f_n(x) \leqslant f_{n-1}(x), \text{если } n \text{ четно} \tag{11}$$

и

$$f_{n-1}(x) < f_n(x) \leqslant \frac{9}{2} + \frac{1}{2^n}, \text{если } n \text{ нечетно.} \tag{12}$$

Действительно, пусть n натуральное число, а $k \leqslant k_n$ наибольшее натуральное такое, что $x \in O_{n,k}$.

Тогда при четном n на множестве $O_{n,k}$ выполняется неравенство $g_{n,k}(x) > 0$. Так как $g_{n,k+1}(x) = g_{n,k}(x) - f_{n,k+1}$ и $f_{n,k}(x) < 7/2$, то $-7/2 \leqslant g_{n,k+1}(x)$.

Поскольку при $p > k+1$ вне множества $O_{n,k+1}$ будет $f_{n,p}(x) < 2^{-(n+p)}$ и

$$f_n(x) = g_{n,k}(x) - f_{n,k+1}(x) - \sum_{p=k+2}^{k_n} f_{n,p}(x),$$

то отсюда следует, что

$$f_n(x) \geqslant -7/2 - \frac{1}{2^n}.$$

С другой стороны, из определения функции f_n имеем очевидное неравенство $f_n(x) \leqslant f_{n-1}(x)$.

Если n нечетное, то на множестве $O_{n,k}$ имеет место неравенство $g_{n,k}(x) < 1$. Так как $g_{n,k+1}(x) = g_{n,k-1}(x) + f_{n,k}$ и $f_{n,k}(x) < 7/2$, то $g_{n,k+1}(x) < 9/2$.

Поскольку при $p \geqslant k+1$ будет $f_{n,p}(x) < 2^{-(n+p)}$ и

$$f_n(x) = g_{n,k}(x) - f_{n,k+1}(x) - \sum_{p=k+1}^{k_n} f_{n,p}(x),$$

то отсюда следует, что

$$f_n(x) < 9/2 + \frac{1}{2^n}.$$

Неравенство $f_{n-1}(x) \leqslant f_n(x)$ очевидно.

Далее, пусть n четно.

Поскольку $O_n \subset O_{n-1}$, то из (11) и (12) следует, что на O_n выполняется неравенство

$$-\frac{7}{2} - \frac{1}{2^n} \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n-1}(x) \leqslant \frac{9}{2} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Аналогично при нечетном n получаем

$$-\frac{7}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant f_{n-1}(x) \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{9}{2} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, на O_n выполняется неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant 5. \tag{13}$$

Если $x \notin O_n$, то выберем такое m, что $x \notin O_m$ и $x \in O_{m-1}$. Представим функцию $f_n(x)$ в виде

$$f_n(x) = f_{m-1}(x) + \sum_{k=m-1}^{n-1} [f_{k+1}(x) - f_k(x)].$$

В силу неравенства (10) при $k = m-1, m, \ldots, n-1$ имеет место неравенство $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant 1/2^k$. Отсюда из (13) следует, что

$$|f_n(x)| \leqslant 6.$$

Таким образом, последовательность $f_n(x)$ равномерно ограничена.

Положим

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{k+1}(x) - f_k(x)].$$

Из (б) следует, что этот ряд сходится во всех точках $x \notin E$, т. е. сходится почти всюду, а $f(x)$ имеет сходящийся при $x \notin E$ ряд Фурье. Из равномерной ограниченности последовательности $f_n(x)$ следует, что функция $f(x)$ ограничена.

Для того, чтобы ряд Фурье функции $f(x)$ расходился на E, надо выбирать множество $O_{n,0}$ следующим образом. Пусть для произвольного множества X действительной прямой $\tilde{X}$ обозначает множество $\{e^{it} : t \in X\}$. Возьмем $u_{n-1}(z)$ — гармоническую меру множества $\tilde{O}_{n-1}$. Функция $u_{n-1}(z)$ непрерывна на $\tilde{O}_{n-1}$ и равна на нем 1, поэтому для каждой дуги, составляющей $\tilde{O}_{n-1}$, найдется кривая, лежащая в круге D и соединяющая ее концы, на которой будет выполняться неравенство $u_{n-1}(x) > 1 - 1/2^n$. Объединение всех таких кривых обозначим через Q_{n-1}. Выберем множество $O_{n,0}$ так, чтобы гармоническая мера множества $\tilde{O}_{n,0}$ удовлетворяла на $\tilde{Q}_{n,0}$ неравенству $u_{n-1}(x) < 1/2^n$.

Обозначим через $F_n(z)$ интеграл Пуассона функции $f_n(x)$. Из построения множества $O_{n,0}$ следует, что $|F_{n-1}(z) - F_n(z)| < 1/2^n$ вне множества $\tilde{O}_{n,0}$ Так как, кроме того, на множестве $\tilde{O}_{n,0}$ выполняется неравенство $|F_{n-1}(z) - F_n(z)| \leqslant 7$, то $|F_{n-1}(z) - F_n(z)| \leqslant u_{n-1}(z) + 1/2^n$.

Представив интеграл Пуассона функции f как

$$F(z) = F_{n-1}(z) + \sum_{k=n-1}^{\infty} F_n(z) - F_{n-1}(z),$$

отсюда получаем, что на множестве Q_n функция $F(z)$ удовлетворяет условию $F(z) > 1 - 1/2^{n-1}$.

Точно так же покажем, что при четном n на множестве Q_n выполняется неравенство $F(z) < 1/2^{n-1}$.

Так как каждый радиус с концом на множестве $\tilde{E}$ пересекает все множества Q_n, $n = 1, 2, \dots$, то функция F не имеет радиальных пределов на $\tilde{E}$, и, следовательно, по теореме Абеля, ряд Фурье функции $f(x)$ расходится в точках множества E.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971. 126 с.
2. *Колесников С. В.* О множествах расходимости рядов Тейлора аналитических функций с конечным интегралом Дирихле // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2006. Вып. 3. С. 122—128.